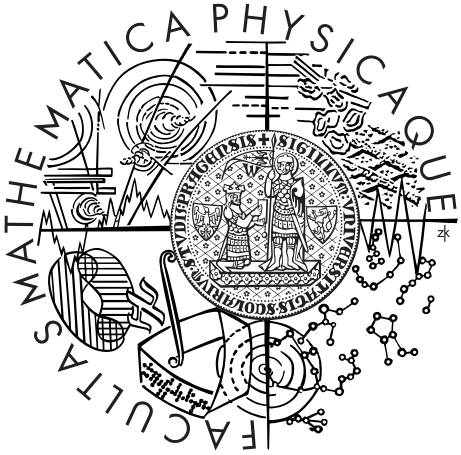
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová Práce

2011 Jakub Černý

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jakub Černý

Stochastické modelování úrokových sazeb

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní plán: Finanční a pojistná matematika

Praha 2011

Rád bych poděkoval hlavně vedoucímu mé diplomové práce RNDr. Jiřímu Witzanymu, Ph.D., za trpělivost, čas a ochotu, se kterou se mi věnoval, za poskytnuté materiály a data, za velmi cenné teoretické i praktické rady při aplikování teorie a za připomínky k textu. Dále bych chtěl poděkovat Bc. Janě Plačkové za veškerou pomoc a podporu při psaní práce.

Nejvíce bych chtěl poděkovat své mamince a tatínkovi za morální podporu nejen během psaní této práce, ale po celou dobu mého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 11.4.2011 Jakub Černý

Obsah

1 Úvod **7**

2 Teoretická část **8**
2.1 Základní pojmy a definice 8
2.1.1 Matematická část 8
2.1.2 Finanční část 13
2.2 Short-rate modely 17
2.2.1 Vašíčkův model 17
2.2.2 Ho-Lee model 26
2.2.3 Hull-White model 28
2.2.4 Afinní časové struktury 31
2.3 Heath-Jarrow-Morton model 32
2.3.1 Obecný model 32
2.3.2 Markovská vlastnost 35
2.3.3 Dvourozměrný případ 37
2.4 LIBOR Market Model 38
2.4.1 Odvození modelu 39
2.4.2 Forwardové volatility 41
2.4.3 Implementace modelu 41
2.5 Ocenění opcí 42
2.5.1 Short-rate modely 43
2.5.2 LIBOR Market model 45
2.6 Kalibrace modelů 47
2.6.1 Vašíčkův model 47
2.6.2 Ho-Lee model 49
2.6.3 Hull-White model 52
2.6.4 LIBOR Market model 54

3 Analytická část **56**
3.1 Popis obchodu a vstupní data 56
3.1.1 Konfirmace obchodu 56
3.1.2 Vstupní data a jejich vlastnosti 61
3.2 Aplikace modelů 63

3.2.1 Vašíčkův model 63
3.2.2 Ho-Lee model 66
3.2.3 Hull-White model 67
3.2.4 Libor market model 68
3.3 Výsledky ocenění derivátu 69
3.3.1 Porovnání použitých metod 69
3.3.2 Navrhované doporučení 80

4 Závěr **82**

Literatura **84**

Název práce: Stochastické modelování úrokových sazeb
Autor: Jakub Černý
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.
e-mail vedoucího: witzanyj@vse.cz

Abstrakt: Tato práce studuje různé stochastické modely úrokových sazeb. Teoretická část popisuje modely okamžité úrokové sazby (short-rate modely), HJM rámec a LIBOR Market model. Zaměřuje se detailněji na nejznámější short-rate modely, tj. Vašíčkův, Hull-White a Ho-Lee model, a na LIBOR Market model. Tato část je zakončena oceněním úrokových opcí na základě výše zmíněných modelů a kalibrací modelů na reálná data. Analytická část práce rozebírá ocenění reálného nestandardního úrokového derivátu dle jednotlivých modelů. Součástí ocenění derivátu je porovnání modelů mezi sebou z hlediska celkového ocenění i z hlediska zachycení dynamiky úrokových sazeb. Cílem této práce je popsat a hlavně porovnat mezi sebou různé stochatické modely úrokových sazeb.
Klíčová slova: Stochastické modely úrokových sazeb, Modely okamžité úrokové sazby, LIBOR Market model

Title: Stochastic interest rates modeling
Author: Jakub Černý
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: witzanyj@vse.cz

Abstract: This present work studies different stochastic models of interest rates. Theoretical part of this work describes short-rate models, HJM framework and LIBOR Market model. It focuses in detail on widely known short-rate models, i.e. Vašíček, Hull-White and Ho-Lee model, and on LIBOR Market model. This part ends by valuation of interest rate options and model calibration to real data. Analytical part of the work analyses valuation of real non-standard interest rate derivative using different models. Part of this derivative valuation is comparison among models in terms of general valuation and also in terms of capturing the dynamics of interest rates. The aim of this work is to describe different stochastic models of interest rates and mainly to compare them with each other.
Keywords: Stochastic models of interest rates, Short-rate models, LIBOR Market model

Kapitola 1

Úvod

„Koruna dnes je jistější, než koruna zítra“ a „Čas jsou peníze“, jsou dva základní principy finančního světa, které jinými slovy říkají, že je třeba ohodnotit „nějakou částkou“ odloženou spotřebu a nejistotu dnešní koruny zítra. Tuto „nějakou částku“ nazýváme úrokem a procentuálnímu vyjádření úroku z koruny říkáme úroková sazba. Můžeme tedy říci, že úroková sazba určuje cenu peněz.

Úroková sazba je ve společnosti velmi rozšířeným pojmem. Nejčastěji se s ní lidé setkávají při žádosti o půjčku, např. hypotéku. Ne každý však ví, že s úrokovou sazbou, resp. s deriváty na úrokové sazby, se obchoduje jak na burze, tak mimo ní. Obecně se úroková sazba považuje za náhodnou veličinu, kterou je možné stochasticky modelovat. A právě popisem a aplikací těchto modelů se tato práce zabývá.

Celá práce je rozdělena na dvě hlavní kapitoly, na teoretickou část a analytickou část.

V teoretické části jsou zavedeny potřebné pojmy z teorie pravděpodobnosti, statistiky a finanční matematiky. Dále jsou popsány modely okamžité úrokové sazby (tzv. short rate modely), HJM rámec a jeho diskretizace v podobě LIBOR Market modelu. Detailněji se tato část zaměřuje na čtyři důležité modely úrokových sazeb: Vašíčkův, Hull-White, Ho-Lee a LIBOR Market model. Následně je ukázáno ocenění úrokových opcí na základě těchto modelů a závěr teoretické části se věnuje kalibraci modelů na reálná data.

Analytická část práce rozebírá ocenění skutečného nestandardního úrokového derivátu, konkrétně úrokového swapu s collarem, pomocí výše zmíněných čtyř modelů. Tyto modely jsou mezi sebou porovnány jak z hlediska empirického rozdělení jednotlivých plateb (obě strany platí pohyblivé částky), tak z hlediska empirického rozdělení celkového ocenění úrokového derivátu s collarem i bez něj. Závěr této části shrnuje výsledky ocenění a doporučuje změny nastavení parametrů obchodu. Pro ocenění derivátu a analýzu dat je využíván program R a Mathematica®.

Kapitola 2

Teoretická část

2.1 Základní pojmy a definice

V této kapitole si uvedeme potřebný matematický aparát a zadefinujeme pojmy z finanční matematiky, které budeme následně využívat ke stochastickému modelování úrokových sazeb. Text předpokládá základní znalosti lineární algebry, matematické analýzy, teorie míry, teorie pravděpodobnosti a statistiky. Základní pojmy z teorie náhodných procesů a teorie pravděpodobnosti, které budeme používat a nejsou zde definované, lze najít v [22] a [19].

2.1.1 Matematická část

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a nechť $\{X_t, t \in T\}, T \subset \mathbb{R}$ (reálný čas) je neprázdná, je reálný náhodný proces.

Definice 1 (Filtrace) Systém σ-algeber $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ takový, že $\forall t \in T$, $\mathscr{F}_t \in \mathcal{A}$ a $\forall s, t \in T, s < t, \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ se nazývá *filtrace* (též neklesající systém σ-algeber).

Definice 2 (Adaptovaný proces) Proces $\{X_t, t \in T\}$ je $\mathscr{F}_t$-*adaptovaný* (adaptovaný na filtraci $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$), jestliže X_t je $\mathscr{F}_t$-měřitelná $\forall t \in T$.

Definice 3 (Martingal) $\{X_t, t \in T\}$ je $\mathscr{F}_t$-adaptovaný náhodný proces pro nějakou filtraci $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$. Nechť $\forall t \in T$, $X_t \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Řekneme, že $\{X_t, t \in T\}$ je

- $\mathscr{F}_t$-*supermartingal*, jestliže $\forall s, t \in T$, $s \leq t$ platí

$$E[X_t|\mathscr{F}_s] \leq X_s, s.j. \tag{2.1.1}$$

- $\mathscr{F}_t$-*submartingal*, jestliže $\forall s, t \in T$, $s \leq t$ platí

$$E[X_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s, s.j. \tag{2.1.2}$$

- $\mathscr{F}_t$-*martingal*, jestliže $\forall s, t \in T$, $s \leq t$ platí

$$E[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s, s.j. \tag{2.1.3}$$

Definice 4 (Procesy s nezávislými přírůstky) Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces, T je interval a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ můžeme tento interval rozdělit na $t_1, t_2, \ldots, t_n$ s vlastností $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Pokud jsou náhodné veličiny $X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé, říkáme, že $\{X_t, t \in T\}$ je *proces s nezávislými přírůstky.*

Jedním z nejdůležitějších procesů s nezávislými přírůstky, a ve finanční matematice nejvíce používaný, je Wienerův proces (nazývaný též jako proces Brownova pohybu).

Definice 5 (Wienerův proces) *Wienerův proces* $\{W_t, t \geq 0\}$ je gaussovský náhodný proces (všechna jeho konečněrozměrná rozložení jsou normální) s vlastnostmi

1. $W_0 = 0$ s.j.,
2. přírůstky $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ jsou pro libovolné $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ nezávislé náhodné veličiny,
3. přírůstky $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$, $\forall s, t \in T$, $0 \leq s < t$, kde $\sigma^2 > 0$ a proces $\{W_t, t \geq 0\}$ má spojité trajektorie.

Všechny předchozí definice směřují k definici stochastického integrálu, bez kterého by se modelování průběhů náhodných veličin neobešlo (obzvlášť v oblasti finanční matematiky). Existují dvě různé definice stochastického integrálu: Itôův integrál a Stratonovitchův integrál. My si zadefinujeme Itôův integrál (dále jen stochastický integrál).

Nebudeme zde odvozovat definici stochastického integrálu. Rigorózní odvození jednotlivých kroků pro zavedení stochastického integrálu je uvedeno v [21]. Pro přehlednost jen uveďme, že stochastický integrál se nejdříve zadefinuje pro jednoduché náhodné funkce (jednoduché procesy).

Definice 6 (Jednoduchý proces) Řekneme, že náhodný proces $\Delta(t, \omega)$ je *jednoduchý*, pokud je adaptovaný a

$$\Delta(t, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(t_k, \omega) \mathbf{I}\{t \in (t_k, t_{k+1}]\}, \tag{2.1.4}$$

kde $\Delta(t_k, \omega)$ je $\mathscr{F}_{t_k}$-měřitelný a $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ je nějaké dělení intervalu $[0, T]$.

Definice 7 (Stochastický integrál) Nechť $\Delta(t)$ je jednoduchý proces definovaný výše. Pro $t \in [0,T]$ jeho stochastickým integrálem

$$I(t) = \int_0^t \Delta(s) dW(s) \tag{2.1.5}$$

rozumíme

$$I(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \Delta(t_k)(W(t) - W(t_k)),\ t_k \leq t \leq t_{k+1}. \tag{2.1.6}$$

A jelikož každý adaptovaný proces $\Delta(t)$, který splňuje

$$E\left[\int_0^T \Delta^2(s) ds\right] < \infty, \tag{2.1.7}$$

můžeme přiblížit pomocí adaptovaných jednoduchých procesů $\Delta_n(t)$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T |\Delta_n(t) - \Delta(t)|^2\right] dt = 0, \tag{2.1.8}$$

definujeme stochastický integrál rovností

$$\int_0^T \Delta(s) dW(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Delta_n(s) dW(s). \tag{2.1.9}$$

Limita existuje, pokud je $I_n(t)$ cauchyovská posloupnost v kvadratickém středu.

Věta 1 (Základní vlastnosti stochastického integrálu) *Nechť X, Y jsou náhodné procesy, pro které platí (2.1.7) a W je Wienerův proces. Potom pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$ platí*

$$E\left[\int_0^T X dW\right] = 0, \tag{2.1.10}$$

$$E\left[\left(\int_0^T X dW\right)\left(\int_0^T Y dW\right)\right] = E\left[\int_0^T XY du\right], \tag{2.1.11}$$

$$\int_0^T (aX + bY)\, dW = a\int_0^T X dW + b\int_0^T Y dW. \tag{2.1.12}$$

Důkaz. Nebudeme zde uvádět, lze nalézt v [18].

Věta 2 (Itôova isometrie) *Nechť pro proces X platí (2.1.7). Potom platí Itôova isometrie*

$$E\left[\int_0^t X dW\right]^2 = E\left[\int_0^t X^2 du\right] \tag{2.1.13}$$

pro všechna t, podmíněná Itôova isometrie

$$E\left[\left(\int_s^t X dW\right)^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] = E\left[\int_s^t X^2 du \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \tag{2.1.14}$$

pro všechna $t > s$.

Důkaz. Nebudeme zde uvádet, lze nalézt v [21].

Pomocí stochastického integrálu můžeme zadefinovat stochastický diferenciál, který budeme neustále využívat v dalších kapitolách této práce.

Definice 8 (Stochastický diferenciál) Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in [0,T]\}$, $T > 0$ má *stochastický diferenciál*

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), \tag{2.1.15}$$

když

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(u, X(u))du + \int_0^t b(u, X(u))dW(u), \tag{2.1.16}$$

kde $\{a(t, X(t)), t \in [0,T]\}$, $\{b(t, X(t)), t \in [0,T]\}$ jsou adaptované procesy, pro které platí

$$\int_0^T |a(u, X(u))|du < \infty, \qquad \int_0^T b(u, X(u))^2 du < \infty. \tag{2.1.17}$$

Pravidla diferenciálního počtu ve stochastickém prostředí se liší od pravidel zavedených v matematické analýze. Uveďme si ta nejdůležitější, tj. násobení diferenciálů, pro které platí

$$(dt)^2 = 0,\ (dW(t))^2 = dt,\ dtdW(t) = 0,\ d(W(t))^2 = 2W(t)dW(t). \tag{2.1.18}$$

Abychom byli schopni spočítat stochastický diferenciál, budeme kromě početních pravidel potřebovat tzv. Itôovo lemma (někdy označováno jako Itôova formule). Itôovo lemma je jedním z nejdůležitějších vztahů ve stochastickém počtu, je obdobou Taylorova rozvoje pro stochastické prostředí.

Věta 3 (Itôovo lemma) *Nechť $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce se spojitými derivacemi $\partial g/\partial t$, $\partial g/\partial x$, $\partial^2 g/\partial x^2$. Dále nechť $\{X(t), t \in [0,T]\}$ je proces se stochastickým diferenciálem*

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t). \tag{2.1.19}$$

Označme $G(t) \overset{ozn.}{=} g(t, X(t)) \overset{ozn.}{=} g$. Potom $\{G(t), t \in [0,T]\}$ má stochastický diferenciál ve tvaru

$$dG(t) = \frac{\partial g(t, X(t))}{\partial t} + \frac{\partial g(t, X(t))}{\partial x} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X(t))}{\partial x^2} (dX(t))^2. \tag{2.1.20}$$

Po úpravě pomocí (2.1.18) můžeme stochastický diferenciál přepsat do tvaru

$$dG(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} a(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} b(t, X(t)) \right] dt + \frac{\partial g}{\partial x} b(t, X(t)) dW(t). \tag{2.1.21}$$

Pomocí Itôova lemmatu tedy vypočítáme stochastický diferenciál procesu, který vznikne tím, že do hladké funkce dosadíme proces se stochastickým diferenciálem.

Důkaz. Nebudeme zde uvádět, poznamenejme jen, že se dokazuje pomocí jednoduchých funkcí. Rigorózní důkaz lze najít v [18].

Nyní si uvedeme definici rizikově neutrální, resp. martingalové, míry. Ačkoliv tato definice spadá spíše do finanční části, uvedeme si ji již nyní, abychom mohli spojitě navázat na další větu a definici. Jelikož jde o slovní definici, nebudeme ji číslovat. Více k rizikově neutrální míře a jejímu zavedení pomocí martingalů lze nalézt v [16] nebo v [24].

Rizikově neutrální (martingalová) míra je míra, při které žádný obchodní systém ve střední hodnotě (očekávané hodnotě) nevydělá. Jinými slovy existuje míra, při které nedochází k arbitrážní příležitosti (tj. není možné generovat zisk bez rizika).

Definice 9 (Radon-Nikodymova derivace) Nechť $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ je pravděpodobnostní prostor s kladnou mírou P a Z je skoro jistě kladná náhodná veličina, P-integrovatelná na Ω. Pro $A \in \mathscr{F}$ buď

$$Q(A) = \int_A Z dP. \tag{2.1.22}$$

Potom Q je kladná pravděpodobnostní míra a Z se nazývá *Radon-Nikodymova derivace* míry Q vzhledem k míře P a značí se

$$Z = \frac{dQ}{dP}.$$

Definice 10 (Proces Radon-Nikodymovy derivace) Nechť $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $\mathscr{F}_t, 0 \leq t \leq T$, je filtrace, $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$. Dále nechť Z je náhodná veličina s $E[Z] = 1$ a Q je pravděpodobnostní míra splňující 2.1.22. Definujeme *proces Radon-Nikodymovy derivace* jako

$$Z(t) = E[Z|\mathscr{F}_t].$$

Věta 4 (Girsanovova věta - pro jeden rozměr) *Nechť $W(t)$, $0 \leq t \leq T$ je $\mathscr{F}_t$-Wienerův proces ($\mathscr{F}_t$-adaptovaný) na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $\mathscr{F}_t$ je filtrace. Nechť $\theta(t)$, $0 \leq t \leq T$ je $\mathscr{F}_t$-adaptovaný proces. Definujme*

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp\left\{ -\int_0^t \theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)du \right\}, \\ W^Q(t) &= W(t) + \int_0^t \theta(u)du \end{aligned}$$

a předpokládejme, že

$$E\left[\int_0^T \theta^2(u)Z^2(u)du\right] < \infty.$$

Označme $Z = Z(T)$. Potom $E^Q[Z] = 1$ a proces $W^Q(t)$, $0 \leq t \leq T$ je Wienerův proces vzhledem k pravděpodobnostní míře Q definované pomocí $Z = dQ/dP$.

*Důkaz.*Nebudeme dokazovat, lze najít v [18].

2.1.2 Finanční část

Úrok je peněžní odměna věřiteli za půjčku poskytnutou dlužníkovi. Tedy věřitel poskytne dlužníkovi půjčku (úvěr) a do určité sjednané lhůty musí dlužník zaplatit věřiteli původní půjčenou částku (jistinu, nominál) navýšenou o úrok.

Úroková míra je míra úroku vyjádřená jako procento z určitého objemu peněz zaplacených za předem specifikovaný časový interval.

Úrokový swap je dohoda o budoucí směně úrokových plateb vztahujících se ke stejné částce, ale definovaných odlišně. Nedochází ke směně nominálních částek, ale jen úroků vztahujících se k této částce.

Úrokový cap je finanční derivát, ve kterém kupující kontraktu získá od prodávajícího platbu, pokud variabilní referenční úroková sazba překročí v dohodnutém období nějakou předem dohodnutou horní mez.

Úrokový floor je finanční derivát, ve kterém kupující kontraktu získá od prodávajícího platbu, pokud variabilní referenční úroková sazba překročí v dohodnutém období nějakou předem dohodnutou dolní mez.

Úrokový collar je kombinace úrokového capu a flooru.

Pokud budeme dále v textu používat pojmy cap, floor a collar (někdy také strop, dno a obojek), jedná se o úrokové deriváty. Tyto deriváty lze samozřejmě zkombinovat tak, aby kupující platil pouze sazbu mezi horní a dolní mezí.

Definice 11 (Spotová úroková míra) Nechť $t < T$. Řekneme, že $y(t,T)$ je *spotová úroková míra* (také spotová míra nebo spotová sazba) od času t do času T, jestliže platí

$$P(t,T) = F \cdot \exp\{-y(t,T)(T-t)\}, \tag{2.1.23}$$

kde $P(t,T)$ je cena bezkupónového dluhopisu v čase t, který vyplácí F v čase T. V následujícím textu budeme uvažovat jednotkovou nominální hodnotu ($F = 1$), tedy

$$P(t,T) = \exp\{-y(t,T)(T-t)\}. \tag{2.1.24}$$

Z rovnice lze snadno odvodit vzorec pro úrokovou míru

$$y(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \tag{2.1.25}$$

Definice 12 (Forwardová úroková míra) Nechť $t < T < T^*$. Řekneme, že $f(t,T,T^*)$ je *forwardová úroková míra* (také forwardová míra, forwardová sazba) sjednaná v čase t na dobu od T do T^*, když platí následující vztah

$$e^{y(t,T^*)(T^*-t)} = e^{y(t,T)(T-t)} \cdot e^{f(t,T,T^*)(T^*-T)}. \tag{2.1.26}$$

Z této rovnice můžeme opět snadno odvodit výpočet forwardové míry

$$f(t,T,T^*) = \frac{y(t,T^*)(T^*-t) - y(t,T)(T-t)}{T^*-T}. \tag{2.1.27}$$

Spotové úrokové míry jsou běžně pozorovatelné na trhu (např. PRIBOR). Forwardové sazby se z nich pak dají jednoduše dopočítat. Nicméně v teorii se využívají limitní verze těchto měr zadefinované níže.

Uvažujme, že v čase t máme na bankovním účtu částku $B(t)$. Tato částka je v čase t úročena úrokovou mírou $r(t)$. Za časový okamžik Δt se částka na bankovním účtu zvýší na

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r(t)\Delta t). \tag{2.1.28}$$

Upravíme-li rovnici (2.1.28) dostaneme následující tvar

$$\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = r(t). \tag{2.1.29}$$

Pokud provedeme limitní přechod $\Delta t \to 0$ obdržíme diferenciální rovnici vývoje bankovního účtu

$$\mathrm{d}B(t) = r(t)\mathrm{d}t. \tag{2.1.30}$$

Bankovní účet je jedním ze základních *numeraire* pro ocenění ostatních aktiv. To znamená, že při rizikově neutrální pravděpodobnosti Q je $X(t)/B(t)$ Q-martingal a hodnota aktiva $X(t)$ je vyjádřena v jednotkách B(t).

Formálně lze bankovní účet zadefinovat stejně jako v [4].

Definice 13 (Bankovní účet) Definujme velikost bankovního účtu v čase $t \geq 0$ jako $B(t)$. Předpokládáme, že $B(0) = 1$ a tento bankovní účet se řídí následující diferenciální rovnicí

$$dB(t) = r(t)dt,$$

kde $r(t)$ je kladná funkce času.

Řešením této rovnice je následující rovnost

$$B(t) = \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}. \tag{2.1.31}$$

Pokud bychom chtěli vědět, jak velkou částku musíme v čase t na bankovní účet uložit, aby měl v čase T velikost $B(T)$ zavedeme pojem tzv. *diskotního faktoru*.

Definice 14 (Diskontní faktor) *Diskontní faktor* $D(t, T)$ v časovém intervalu (t, T) je částka v čase t, který je rovna 1 v čase T a je dán jako

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}.$$

Úrokovou míru $r(t)$ nazýváme též okamžitá spotová úroková míra, krátkodobá spotová sazba nebo short-rate sazba. Alternativně ji můžeme zadefinovat následovně:

Definice 15 (Okamžitá spotová úroková míru) Definujeme *okamžitou spotovou úrokovou míru* jako

$$r(t) = \lim_{T \to t^+} y(t,T). \tag{2.1.32}$$

Okamžitá spotová úroková míra na trhu pozorovatelná není, nicméně místo ni můžeme použít aproximaci. Obecně se nedoporučuje volit O/N sazbu (over night), která je velmi volatilní. V praxi se častěji volí např. 1M, 2M nebo 3M sazba.

Definice 16 (Okamžitá forwardová úroková míru) Definujeme *okamžitou forwardovou úrokovou míru* jako

$$f(t,T_1) = \lim_{T_2 \to T_1^+} f(t,T_1,T_2). \tag{2.1.33}$$

Věta 5 *Nechť $f(t,T)$ je okamžitá forwardová sazba. Potom platí*

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}. \tag{2.1.34}$$

Důkaz. Dosadíme do rovnice (2.1.26)

$$\exp\{-y(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t)\} = \exp\{-y(t,T)(T-t)\}\exp\{-f(t,T,T+\Delta T)\Delta T\}.$$

To můžeme přepsat na základě rovnice (2.1.24)

$$P(t,T+\Delta T) = P(t,T)\exp\{-f(t,T,T+\Delta T)\Delta T\}.$$

Pokud předchozí rovnici upravíme a limitně přejdeme k okamžité forwardové míře dostáváme

$$f(t,T) = \lim_{\Delta T \to 0} -\frac{\ln P(t,T+\Delta T) - \ln P(t,T)}{\Delta T}.$$

Z toho již plyne tvrzení věty, protože

$$f(t,T) = -\frac{\partial P(t,T)}{\partial T}\frac{1}{P(t,T)} = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}.$$

□

Důsledek 1 Z věty 5 a z rovnosti $P(t,t) = 1$ plyne následující vztah

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,u)du\right\}. \tag{2.1.35}$$

Důkaz. Na základě předchozí věty platí

$$\ln P(t,T) = \ln P(t,T) - \ln P(t,t) = \int_t^T \frac{\partial \ln P(t,u)}{\partial u} du = -\int_t^T f(t,u) du.$$

□

Na základě vztahů, které jsme si zde uvedli víme, že stačí znalost pouze jedné z funkcí (cena bezkupónového dluhopisu, spotová úroková míra nebo okamžitá forwardová míra), abychom byli schopni dopočítat ostatní. Tyto vztahy budeme využívat při ocenění bezkupónového dluhopisu pomocí modelů úrokových sazeb.

Nicméně v této práci se budeme věnovat úrokovým sazbám, které se chovají náhodně, stochasticky. Odvození vzorců pro výpočet hodnoty bezkupónového dluhopisu proto musíme určit pomocí jedné z hypotéz očekávání. Aby nedocházelo ke vzniku arbitrážních příležitostí určíme hodnotu bezkupónového dluhopisu dle tzv. lokální hypotézy očekávání (viz [20])

$$P(t,T) = E\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\right]. \tag{2.1.36}$$

2.2 Short-rate modely

V této kapitole jsou uvedeny známé short rate modely, které se používají k ocenění bezkupónových dluhopisů. Všechny tyto modely jsou pojmenovány podle matematiků, kteří je zavedli. Tato kapitola se zabývá pouze modely jednofaktorovými, tj. modely, které mají jen jeden zdroj nejistoty. Zobecnění uvedených i zde neuvedených modelů, jejichž počet neustále narůstá, lze najít v [25].

2.2.1 Vašíčkův model

Oldřich Vašíček v roce 1977 předpokládal, že okamžitá spotová úroková míra se vzhledem ke skutečné rizikové míře chová jako Ornstein-Uhlenbeckův proces s konstatními parametry. Pro vhodnější volbu tržní ceny rizika je ekvivalentní předpokládat, že se okamžitá spotová úroková míra řídí Ornstein-Uhlenbeckovým procesem s konstatními parametry při rizikově neutrální míře (martingalové míře).

Vašíčkův model popisuje vývoj okamžité spotové úrokové sazby následovně

$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma dW(t). \tag{2.2.1}$$

K řešení této stochastické diferenciální rovnice využijeme funkci

$$g_u = g(u, r(u)) = r(u)e^{-a(t-u)}, \tag{2.2.2}$$

kterou dosadíme do Itôovy formule

$$dg_u = \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial r}dr(u) + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}[dr(u)]^2,$$

kde

$$[dr(u)]^2 = [a(b - r(u))du + \sigma dW(u)]^2 = \sigma^2 du,$$

po dosazení a zderivování tedy dostáváme

$$\begin{aligned} dg_u &= r(u) \cdot a \cdot e^{-a(t-u)}du + a \cdot e^{-a(t-u)}(b - r(u))du + e^{-a(t-u)}\sigma dW(u) \\ &= e^{-a(t-u)} \cdot a \cdot b \cdot du + e^{-a(t-u)}\sigma dW(u). \end{aligned}$$

Z předchozího již můžeme dopočítat $r(t)$

$$\int_s^t dr(u)e^{-a(t-u)} = \int_s^t a \cdot b \cdot e^{-a(t-u)}du + \int_s^t \sigma \cdot e^{-a(t-u)}dW(u).$$

Po zintegrování dostáváme

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u), \tag{2.2.3}$$

kde s je pevně zvolené ($s < t$) a $\mathscr{F}_s$ je filtrace. Potom střední hodnota $r(t)$ je

$$\begin{aligned} E[r(t)|\mathscr{F}_s] &= E\left[r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \\ &= r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right) + E\left[\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \\ &= r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Tato rovnost platí vzhledem k nezávislosti přírůstků Wienerova procesu(viz definice 5) a za podmínky, že známe úrokové sazby v čase s. Místo $E[r(t)|\mathscr{F}_s]$ můžeme psát i $E[r(t)|r(s)]$. Nyní odvodíme obecněji kovarianci

$$cov[r(t), r(v)|\mathscr{F}_s] = E[r(t)r(v)|\mathscr{F}_s] - E[r(t)|\mathscr{F}_s]E[r(v)|\mathscr{F}_s]$$

V následujícím textu budeme střední hodnotu podmíněnou filtrací $\mathscr{F}_s$ značit $E[\,\cdot\,|\mathscr{F}_s] \stackrel{\text{def}}{=} E_s[\,\cdot\,]$. Tento zápis budeme využívat i pro rozptyl a kovarianci. Při výpočtu využijeme vlastnosti střední hodnoty a nezávislost

$$E_s[r(t)r(v)] - E_s[r(t)]E[r(v)] = E_s\left[\left(r(s)e^{-a(t-s)} + b(1-e^{-a(t-s)}) + \sigma\int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u)\right)\cdot\right.$$
$$\left.\left(r(s)e^{-a(v-s)} + b(1-e^{-a(v-s)}) + \sigma\int_s^v e^{-a(v-w)}dW(w)\right)\right] - E_s[r(t)]\cdot E_s[r(v)] \quad =$$
$$= E_s[r(t)]E_s[r(v)] + E_s[r(t)]E_s\left[\sigma\int_s^v e^{-a(v-w)}dW(w)\right] + E_s[r(v)]E_s\left[\sigma\int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u)\right] +$$
$$\sigma^2 E_s\left[\int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u)\int_s^v e^{-a(v-w)}dW(w)\right] - E_s[r(t)]E_s[r(v)].$$

Znovu využijeme nezávislost přírůstků Wienerova procesu (viz definice 5) a dostáváme

$$cov_s(r(t), r(v)) = \sigma^2 E_s\left[\int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u)\int_s^v e^{-a(v-w)}dW(w)\right],$$

z nezávislosti přírůstků na disjunktních intervalech plyne následující rovnost

$$E_s\left[\int_v^t e^{-a(t-u)}dW(u)\int_s^v e^{-a(v-w)}dW(w)\right] = 0,$$

za předpokladu, že $v < t$. Můžeme tedy rozložit integrály a dopočítat pomocí aritmeriky stochastické analýzy (viz věta 2.1.18)

$$
\begin{aligned}
cov_s[r(t), r(v)] &= \sigma^2 E_s \left[\left(\int_s^v e^{-a(t-u)} dW(u) + \int_v^t e^{-a(t-u)} dW(u) \right) \int_s^v e^{-a(v-w)} dW(w) \right] \\
&= \sigma^2 E_s \left[\int_s^v e^{-a(t-u)} dW(u) \int_s^v e^{-a(v-w)} dW(w) \right] \\
&= \sigma^2 e^{-a(t+v)} E_s \left[\int_s^v e^{au} dW(u) \int_s^v e^{aw} dW(w) \right] \\
&= \sigma^2 e^{-a(t+v)} E_s \left[\int_s^v e^{2au} du \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(t+v)} \left(e^{2av} - e^{2as} \right).
\end{aligned}
$$

Obecně můžeme kovarianci $r(t)$ a $r(v)$ zapsat jako

$$
cov_s[r(t), r(v)] = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(t+v)} \left(e^{2a \cdot \min(v,t)} - e^{2as} \right). \tag{2.2.5}
$$

Z kovariance můžeme dopočítat rozptyl $r(t)$ pro $v = t$ jako

$$
\mathrm{var}_s[r(t)] = \sigma^2 e^{-2at} E_s \left[\int_s^t e^{2au} du \right] = \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-s)} \right). \tag{2.2.6}
$$

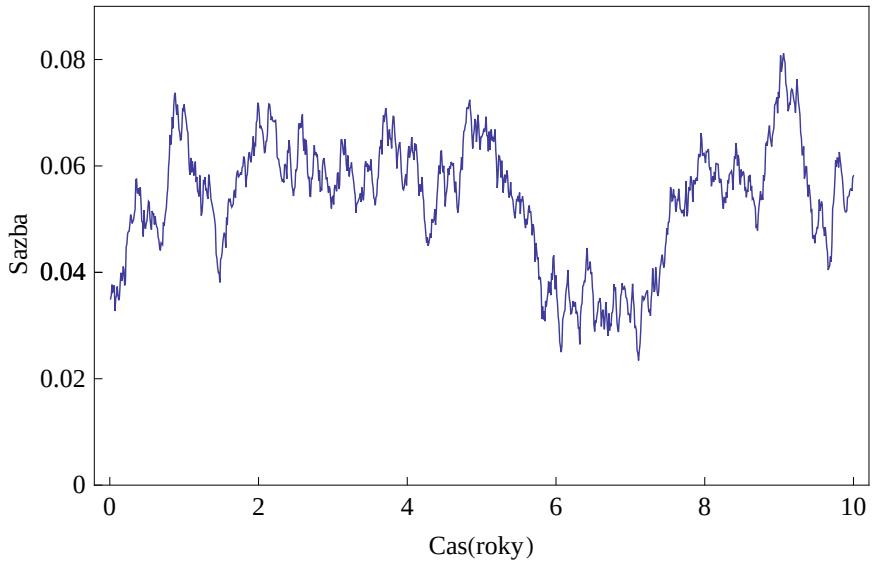
Hodnota parametru b představuje návratovou hodnotu modelu. Proto se Vašíčkův model řadí mezi takzvané *mean-reversion* modely. Následující příklad ilustruje časový průběh úrokové sazby spočítané Vašíčkovým modelem.

Příklad 1 Pokud zvolíme parametry Vašíkova modelu dle tabulky níže

Parametr	Hodnota
a	1
b	0,045
σ	0,02
Čas. krok	0,01
$r(0)$	0,035

Tabulka 2.1: Hodnoty parametrů Vašíčkova modelu

Potom vypadá jeden průběh Vašíčkova modelu následovně



Obrázek 2.1: Vývoj úrokových sazeb simulovaný Vašíčkovým modelem s parametry dle tabulky 2.1

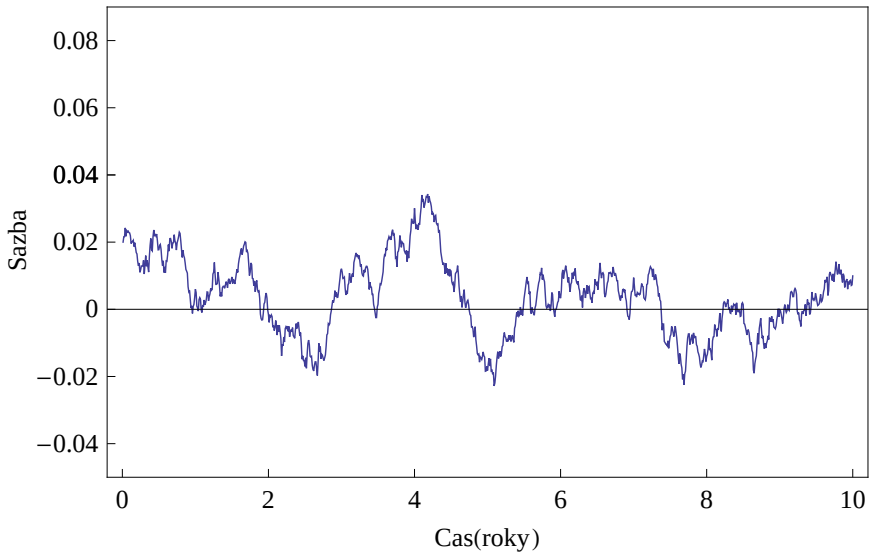
Velkou nevýhodou Vašíčkova modelu je nenulová pravděpodobnost záporné úrokové sazby. Pokud by sazba byla záporná krátkodobě, je možné ji brát v úvahu, nicméně u Vašíčkova modelu může být tento stav dlouhodobý.

Příklad 2 Změníme-li parametry Vašíčkova modelu

Parametr	Hodnota
a	1
b	0,01
σ	0,02
Čas. krok	0,01
$r(0)$	0,02

Tabulka 2.2: Hodnoty parametrů Vašíčkova modelu

Potom je nevýhoda záporné sazby zřetelná z jejího průběhu na dalším grafu.



Obrázek 2.2: Vývoj úrokových sazeb simulovaný Vašíčkovým modelem s parametry dle tabulky 2.2

Připomeňme, že cena bezkupónového dluhopisu (rovnice (2.1.36)) při rizikově neutrální míře Q je rovna

$$P(t,T) = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(u) du \right\} \right], \tag{2.2.7}$$

aby nevznikala arbitrážní příležitost. Potom pro Vašíčkův model platí následující věta:

Věta 6 *Nechť r(t) je okamžitá spotová míra, která se řídí Vašíčkovým modelem, tj. splňuje rovnost (2.2.3). Potom je cena bezkupónového dluhopisu při rizikově neutrální míře Q rovna*

$$P(t,T) = e^{A(t,T) - B(t,T) r(t)}, \tag{2.2.8}$$

kde

$$A(t,T) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) [B(t,T) - (T-t)] - \frac{\sigma^2 B^2(t,T)}{4a}$$

a

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Poznamenejme, že pokud lze cenu bezkupónového dluhopisu daného modelu zapsat ve stejném tvaru jako v tvrzení věty 6, kde $A(t,T)$ a $B(t,T)$ jsou libovolné nenáhodné funkce času, potom říkáme, že tento model má

afinní časovou strukturu. Afinní časové struktury jsou podrobněji popsány v kapitole 2.2.4.

Důkaz. Již víme, že $r(t)$ mají normální rozdělení s podmíněnou střední hodnotou (2.2.4) a podmíněným rozptylem (2.2.6). Dále víme, že hodnota bezkupónového dluhopisu při rizikově neutrální míře Q splňuje rovnost (2.2.7). Potom má cena dluhopisu $P(t,T)$ logaritmicko normální rozdělení (viz [1]), platí tedy

$$E_t^Q\left[\exp\left\{-\int_t^T r(u)du\right\}\right] = \exp\left\{E_t^Q\left[-\int_t^T r(u)du\right] + \frac{1}{2}var_t^Q\left[-\int_t^T r(u)du\right]\right\} \tag{2.2.9}$$

za předpokladu, že známe sazby do času t. Nejdříve spočítáme střední hodnotu

$$\begin{aligned} E_t^Q\left[-\int_t^T r(u)du\right] &= -\int_t^T E^Q[r(u)]du \\ &= -\int_t^T \left(r(t)e^{-a(u-t)} + b - be^{-a(u-t)}\right)du \\ &= -\left[r(t)\frac{e^{-a(u-t)}}{-a} + bu - b\frac{e^{-a(u-t)}}{-a}\right]_{u=t}^T \\ &= -\frac{r(t)-b}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right) - b(T-t). \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Pro výpočet rozptylu integrálu použijeme podmíněnou kovarianci (viz (2.2.5))

$$var_t^Q\left[\int_t^T r(u)du\right] = cov^Q\left[\int_t^T r(u)du, \int_t^T r(s)ds\right]$$

$$= E_t^Q\left[\left(\int_t^T r(u)du - E_t^Q\left[\int_t^T r(u)du\right]\right)\left(\int_t^T r(s)ds - E_t^Q\left[\int_t^T r(s)ds\right]\right)\right]$$

$$= \int_t^T\int_t^T E_t^Q[(r(u) - E_t^Q[r(u)])(r(s) - E_t^Q[r(s)])]dsdu$$

$$= \int_t^T\int_t^T cov_t^Q[r(u), r(s)]dsdu$$

$$= \int_t^T\int_t^T \frac{\sigma^2}{2a}e^{-a(u+s)}\left(e^{2a\min(u,s)} - e^{2at}\right)dsdu$$

Výpočet integrálu se nyní dělí na dvě části, kdy $s \leq u$ a $s \geq u$. Nechť nejdříve $s \leq u$

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\substack{u\in(t,T)\\ s\in(t,u)}} \frac{\sigma^2}{2a}\,e^{-a(u+s)}\left(e^{2a\min(u,s)} - e^{2at}\right)dsdu \\
&= \int_t^T\left(\int_t^u \frac{\sigma^2}{2a}\,e^{-a(u+s)}\left(e^{2as} - e^{2at}\right)ds\right)du \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T\left(1 + e^{2at-2au} - 2e^{at-au}\right)du \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^3}\left[a(T-t) - \frac{e^{-2a(T-t)}}{2} + 2e^{-a(T-t)} - \frac{3}{2}\right]
\end{aligned}$$

analogicky dopočítáme integrál pro $s \geq u$

$$\iint\limits_{\substack{s\in(t,T)\\ u\in(t,s)}} \frac{\sigma^2}{2a}\,e^{-a(u+s)}\left(e^{2a\min(u,s)} - e^{2at}\right)dsdu,$$

výsledkem je pak součet obou integrálů, tedy

$$\iint\limits_{\substack{s\in(t,T)\\ u\in(t,T)}} \frac{\sigma^2}{2a}\, e^{-a(u+s)} \left(e^{2a\min(u,s)} - e^{2at}\right) dsdu$$
$$= \frac{\sigma^2}{2a^3}\big[\, 2a(T-t) - e^{-2a(T-t)} + 4e^{-a(T-t)} - 3\big].$$

Po dosazení do (2.2.9) se cena bezkupónového dluhopisu rovná

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \exp\left\{ -\frac{r(t)-b}{a}\left[1-e^{-a(T-t)}\right] - b(T-t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4a^3}\big[\, 2a(T-t) - e^{-2a(T-t)} + 4e^{-a(T-t)} - 3\big] \right\}. \end{aligned}$$

Po úpravě exponentu dostáváme

$$-\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) r(t) + b\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} - (T-t)\right) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(T-t)$$
$$-\frac{\sigma^2}{2a^2}\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) - \frac{\sigma^2}{4a}\left(\frac{1-2e^{-a(T-t)}+e^{-2a(T-t)}}{a^2}\right) = (*)$$

substituujeme $B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$, potom

$$\begin{aligned} (*) &= -B(t,T)r(t) + b(B(t,T)-(T-t)) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{2a^2}B(t,T) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T) \\ &= \underbrace{\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)[B(t,T)-(T-t)] - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T)}_{A(t,T)} - B(t,T)r(t). \end{aligned}$$

□

Z předchozí věty a vztahu (2.1.25) jednoduše odvodíme vztah pro výpočet spotové úrokové sazby $y(t,T)$ (někdy také časové struktury úrokových měr) pomocí Vašíčkova modelu. Pro přehlednost označme $\tau \stackrel{\text{def}}{=} T-t$.

$$\begin{aligned} y(t,T) &= -\frac{1}{\tau}(A(t,T) - B(t,T)r(t)) \\ &= -\frac{1}{\tau}\left(\frac{(B(t,T)-(T-t))(a^2b-\frac{\sigma^2}{2})}{a^2} - \frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)^2 - B(t,T)r(t)\right) \\ &= b - \frac{\sigma^2}{2a^2} + \frac{(1-e^{-a\tau})}{a\tau}\left(r(t) - b + \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) + \frac{\sigma^2}{4a\tau}\left(\frac{1-e^{-a\tau}}{a}\right)^2. \end{aligned}$$

Ačkoliv je Vašíčkův model velmi oblíbený a často používaný, jeho další nevýhodou, vedle záporných sazeb, jsou konstatní parametry. Tento problém řeší následující dva modely, které nahrazují konstanty funkcemi závislými na čase a využívají i forwardových sazeb.

2.2.2 Ho-Lee model

V roce 1986 přišli Thomas So Yo Ho a Sang-Bin Lee s prvním bezarbitrážním modelem v dokumentu [8]. Tento model zahrnuje i forwardové sazby, tj. veškerou dostupnou informacina trhu, narozdíl od Vašíčkova modelu. Ho-Lee model je jedním ze short rate modelů, který se řídí dynamikou

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma dW(t), \tag{2.2.11}$$

kde $b(t)$ má tvar

$$b(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t. \tag{2.2.12}$$

Tvar funkce $b(t)$ odvodíme na základě toho, že vstupem tohoto modelu je počáteční časová struktura úrokových měr, a proto musí tento model fitovat počáteční výnosovou křivku. Po dopočítání $r(t)$ ze stochastické diferenciální rovnice dostáváme rovnici pro výpočet okamžité sazby dle Ho-Lee modelu ve tvaru

$$r(t) = r(s) + \int_s^t b(u)du + \int_s^t \sigma dW(u) \tag{2.2.13}$$

$$= r(s) + \int_s^t b(u)du + \sigma(W(t) - W(s)). \tag{2.2.14}$$

Stejně jako u Vašíčkova modelu je z rovnice okamžité úrokové sazby vidět, že $r(t)$ mají normální rozdělení s následujícími parametry

$$E_s[r(t)] = r(s) + \int_s^t b(u)du, \tag{2.2.15}$$

$$cov_s[r(t), r(v)] = \sigma^2(\min(t,v) - s), \tag{2.2.16}$$

$$var_s[r(t)] = \sigma^2(t-s). \tag{2.2.17}$$

Jednotlivé kroky výpočtu tu již nebudeme detailně rozepisovat. Víceméně všechny kroky jsou stejné jako v případě Vašíčkova modelu. Jen je zapotřebí si uvědomit, že $b(t)$ není konstanta, ale funkce času.

Abychom tento model nafitovali na počáteční (aktuální) časovou strukturu úrokových měr, musíme spočítat ceny bezkupónových dluhopisů vzhledem k funkci $b(t)$. Pokud nebude řečeno jinak, budeme implicitně k ocenění

používat rizikově neutrální míru Q. Dle rovnice (2.1.36) víme, že počáteční cena bezkupónového dluhopisu se splatností v čase T je rovna

$$P(0,T) = E_0\left[\exp\left\{-\int_0^T r(u)du\right\}\right]. \tag{2.2.18}$$

Označme

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t r(u)du. \tag{2.2.19}$$

Funkci $h(t)$ můžeme rozepsat následovně

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t r(0)du + \int_0^t \int_0^u b(v)dvdu + \int_0^t \int_0^u \sigma dW(v)du \\ &= \int_0^t r(0)du + \int_0^t \int_v^t b(v)dudv + \int_0^t \int_v^t \sigma dudW(v) \\ &= r(0)t + \int_0^t b(v)(t-v)dv + \int_0^t \sigma(t-v)dW(v). \end{aligned}$$

Víme, že když $r(t)$ má normální rozdělení, potom i integrál z $r(t)$ podle t má normální rozdělení. Střední hodnota funkce $h(t)$ je rovna

$$E_0\left[h(t)\right] \stackrel{\text{def}}{=} m(t) = r(0)t + \int_0^t b(v)(t-v)dv \tag{2.2.20}$$

a rozptyl je roven

$$var_0\left[h(t)\right] \stackrel{\text{def}}{=} v(t) = \int_0^t \sigma^2(t-v)^2 dv = \frac{\sigma^2 t^3}{3}. \tag{2.2.21}$$

Při odvozování ceny bezkupónového dluhopisu opět využijeme znalosti střední hodnoty logaritmicko-normálního rozdělení. Po dosazení do rovnice (2.2.18) odvodíme cenu bezkupónového dluhopisu

$$\begin{aligned} P(0,T) &= E_0\left[e^{-h(T)}\right] \\ &= \exp\left\{-E_0\left[h(T)\right] + \frac{1}{2}var_0\left[h(T)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-m(T) + \frac{1}{2}v(T)\right\} \\ &= \exp\left\{-r(0)T - \int_0^T b(v)(T-v)dv + \frac{\sigma^2 T^3}{6}\right\}. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Jelikož chceme z předchozí rovnosti vyjádřit funkci $b(t)$, budeme pracovat s logaritmem $P(0,T)$

$$\ln P(0,T) = -r(0)T - \int_0^T b(v)(T-v)dv + \frac{\sigma^2 T^3}{6}. \tag{2.2.23}$$

Pokud tuto rovnici dvakrát zderivujeme vzhledem k T, získáme rovnost

$$b(T) = -\frac{\partial^2 \ln P(0,T)}{\partial T^2} + \sigma^2 T, \tag{2.2.24}$$

a z věty 5 plyne

$$b(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t. \tag{2.2.25}$$

Časovou strukturu úrokových sazeb opět odvodíme z cen bezkupónových dluhopisů pomocí afinních časových struktur definovaných rovností (2.2.41). V této kapitole si uvedeme výsledky těchto odvození. Ověření správnosti výsledků ukážeme v kapitole 2.6.2. Cena bezkupónového dluhopisu je dána vztahem

$$P(t,T) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)r(t)\},$$

kde

$$B(t,T) = T - t, \tag{2.2.26}$$

$$A(t,T) = -\int_t^T b(u)(T-u)du + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3. \tag{2.2.27}$$

Časovou strukturu úrokových sazeb $y(t,T)$ dopočítáme na základě rovnice (2.1.25).

2.2.3 Hull-White model

Tento model byl popsán Johnem Hullem a Alanem Whitem v roce 1990 v dokumentu [12]. Hull-White model je kombinací Vašíčkova modelu a Ho-Lee modelu. Je definován jako

$$dr(t) = [b(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t), \tag{2.2.28}$$

kde $b(t)$ je tvaru

$$b(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + af(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}). \tag{2.2.29}$$

Pokud porovnáme dynamiku Hull-White modelu s dynamikou Vašíčkova modelu, je zřejmé, že pokud by funkce $b(t)$ byla konstatní, potom by se rovnala parametru b/a Vašíčkova modelu. Zároveň je tento model, stejně jako Vašíčkův, mean-reversion. Ale tentorkát je návratovou hodnotou funkce, konkrétně forwardová křivka, dle vyjádření $b(t)$. Z modelu Ho-Lee částečně převzal Hull-White model funkci $b(t)$ a závislost na forwardových sazbách.

Funkci $b(t)$ u Hull-White modelu odvodíme stejně jako u modelu Ho-Lee nafitováním na současnou výnosovou křivku. Nejdříve ze stochastické diferenciální rovnice (2.2.28) spočítáme, pomocí Itôovy formule a vhodně zvolené transformace, sazby $r(t)$. Transformaci volíme stejnou jako u Vašíčkova modelu, tj. funkci g_u definovanou v rovnici (2.2.2). Potom

$$r(t) = e^{-a(t-s)}r(s) + \int_s^t e^{-a(t-u)}b(u)du + \int_s^t e^{-a(t-u)}\sigma dW(u). \tag{2.2.30}$$

Z této rovnice můžeme dopočítat podmíněnou střední hodnotu, podmíněnou kovarianci a podmíněný rozptyl

$$\begin{aligned} E_s\left[r(t)\right] &= e^{-a(t-s)}r(s) + \int_s^t e^{-a(t-u)}b(u)du, && (2.2.31)\\ cov_s(r(t), r(v)) &= \frac{\sigma^2}{2a}e^{-a(t+v)}\left(e^{2a\cdot\min(v,t)} - e^{2as}\right), && (2.2.32)\\ var_s\left[r(t)\right] &= \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(t-s)}\right). && (2.2.33) \end{aligned}$$

Pro výpočet použijeme rovnice (2.2.18) a (2.2.19). Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t e^{-av}r(0)dv + \int_0^t\int_0^u e^{-a(u-v)}b(v)dvdu + \int_0^t\int_0^u e^{-a(u-v)}\sigma dW(v)du\\ &= \int_0^t e^{-av}r(0)dv + \int_0^t\int_v^t e^{-a(u-v)}b(v)dudv + \int_0^t\int_v^t e^{-a(u-v)}\sigma dudW(v)\\ &= \frac{r(0)\left(1-e^{-at}\right)}{a} + \int_0^t b(v)\frac{1-e^{-a(t-v)}}{a}dv + \int_0^t \sigma\frac{1-e^{-a(t-v)}}{a}dW(v). \end{aligned}$$

Střední hodnota funkce $h(t)$ se potom rovná

$$E_0\left[h(t)\right] \stackrel{\text{def}}{=} m(t) = \frac{r(0)\left(1-e^{-at}\right)}{a} + \int_0^t b(v)\frac{1-e^{-a(t-v)}}{a}dv \tag{2.2.34}$$

a rozptyl je roven

$$\begin{aligned} var_0\left[h(t)\right] \stackrel{\text{def}}{=} v(t) &= \frac{\sigma^2}{a^2}\int_0^t \left(1-e^{-a(t-v)}\right)^2 dv \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2}\left(t-\frac{2\left(1-e^{-at}\right)}{a}+\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right). \quad (2.2.35) \end{aligned}$$

Z počáteční hodnoty bezkupónového dluhopisu se splatností v čase T odvodíme výsledný tvar funkce $b(t)$

$$\begin{aligned} P(0,T) &= E_0\left[e^{-h(T)}\right] \\ &= \exp\left\{-E_0\left[h(T)\right]+\frac{1}{2}var_0\left[h(T)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-m(T)+\frac{1}{2}v(T)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{r(0)\left(1-e^{-aT}\right)}{a}-\int_0^T b(v)\frac{1-e^{-a(T-v)}}{a}dv+\right. \\ &\quad \left.+\left(\frac{\sigma^2 T}{2a^2}-\frac{2\sigma^2\left(1-e^{-aT}\right)}{2a^3}+\frac{\sigma^2(1-e^{-2aT})}{4a^3}\right)\right\}. \quad (2.2.36) \end{aligned}$$

Nyní budeme potřebovat první i druhou derivaci logaritmu $P(0,T)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln P(0,T)}{\partial T} &= -r(0)e^{-aT}-\int_0^T b(v)e^{-a(T-v)}dv+\frac{\sigma^2}{2a^2}-\frac{\sigma^2 e^{-aT}}{a^2}+ \\ &\quad +\frac{\sigma^2 e^{-2aT}}{2a^2}, \quad (2.2.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln P(0,T)}{\partial T^2} &= ar(0)e^{-aT}+-b(T)+\int_0^T ab(v)e^{-a(T-v)}dv+\frac{\sigma^2 e^{-aT}}{a}- \\ &\quad -\frac{\sigma^2 e^{-2aT}}{a}. \quad (2.2.38) \end{aligned}$$

Pokud obě strany rovnice (2.2.37) vynásobíme a a přičteme k rovnici (2.2.38) získáme vztah pro výpočet $b(T)$

$$b(T) = -\frac{\partial^2 \ln P(0,T)}{\partial T^2}-a\frac{\partial \ln P(0,T)}{\partial T}+\frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2aT}\right), \quad (2.2.39)$$

který ještě můžeme upravit pomocí vztahu z tvrzení věty 5 na

$$b(T) = \frac{\partial f(0,T)}{\partial T}+af(0,T)+\frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2aT}\right). \quad (2.2.40)$$

2.2.4 Afinní časové struktury

Z předchozích kapitol víme, že afinní struktury nám pomáhají zjednodušit výpočet ceny bezkupónového dluhopisu na základě jednofaktorového modelu. Nicméně jsme využívali afinních časových struktur bez toho, abychom je přesně zadefinovali nebo ukázali, za jakých podmínek obecný model afinní strukturu má. V této kapitole je popsáno obojí.

Předpokládejme nyní, že cena bezkupónového dluhopisu je funkcí tří proměnných $P(t,T,r(t))$. Řekneme, že model má *afinní časovou strukturu*, jestliže cenu bezkupónového dluhopisu můžeme vyjádřit ve tvaru

$$P(t,T,r(t)) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)r(t)\}, \tag{2.2.41}$$

kde A a B jsou nenáhodné funkce času a $r(t)$ je okamžitá spotová úroková míra. Již jsme si ukázali, že všechny zde uvedené short-rate modely mají afinní časovou strukturu.

Existují další dva způsoby výpočtu ceny bezkupónového dluhopisu, buď přímo vypočítat střední hodnotu z rovnosti (2.2.18), nebo využitím parciální diferenciální rovnice (nazývaná také Black-Scholes-Mertonova parciální diferenciální rovnice)

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu\frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0, \tag{2.2.42}$$

s okrajovou podmínkou $P(T,T) = 1$. Pokud dosadíme rovnici (2.2.41) do rovnice (2.2.42), potom po vydělení P získáme

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial t}r + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 - \mu B - r = 0. \tag{2.2.43}$$

Po dosazení do okrajové podmínky získáme $A(T,T) = B(T,T) = 0$.

Předpokládejme, že v rizikově-neutrálním prostředí je dynamika okamžité spotové úrokové míry

$$dr(t) = \mu(t,r(t))dt + \sigma(t,r(t))dW(t). \tag{2.2.44}$$

Je možné ukázat (viz [6]), že pokud jsou funkce μ a σ ve tvaru

$$\begin{aligned} \mu(t,r(t)) &= \alpha(t)r(t) + \beta(t), \\ \sigma(t,r(t)) &= \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)} \end{aligned} \tag{2.2.45}$$

a α, β, γ, δ jsou nenáhodné funkce, potom má model afinní časovou strukturu.

Pokud model má afinní časovou strukturu, tedy známe výše uvedené nenáhodné funkce, můžeme dopočítat funkce $A(t,T)$ a $B(t,T)$ z rovnice (2.2.41)[1]. Ty získáme řešením soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \alpha B - \frac{\gamma B^2}{2} &= -1, \\ \frac{\partial A}{dt} - \beta B + \frac{\delta B^2}{2} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.46}$$

s okrajovými podmínkami $A(T,T) = B(T,T) = 0$. Soustava (2.2.46) vznikne dosazením funkcí (2.2.45) do diferenciální rovnice (2.2.43) tak, že její koeficienty u členu $r^0 = 1$ dáme do jedné rovnice a členy u r do druhé.

2.3 Heath-Jarrow-Morton model

Modelování úrokových sazeb pomocí short-rate modelů, tedy modelů vycházejících z dynamiky okamžitých spotových úrokových sazeb, má své výhody. Hlavně co se týče výběru souvisejících parametrů (dynamik). Nicméně, short-rate modely mají i svá úskalí. Např. kalibrace na původní výnosovou křivku a zahrnutí kovarianční struktury forwadových sazeb je velmi těžké dosáhnout zvlášť pro modely, které se nedají kalibrovat analyticky.

S první významnou alternativou přišli Ho a Lee v roce 1986, kteří modelovali vývoj celé výnosové křivky pomocí binomického stromu. Jejich myšlenku v roce 1992 převedli do spojitého času Heath, Jarrow a Morton, kteří vyvinuli obecný model (někdy též rámec) pro modelování dynamiky úrokových sazeb. Konkrétněji, zvolili okamžité forwardové míry jako základní veličiny modelu, odvodili bezarbitrážní strukturu stochastického vývoje celé výnosové křivky, kde forwardové míry jsou zcela určeny strukturou svých okamžitých volatilit. To je podstatný rozdíl oproti bezarbitrážní jednofaktorové short-rate dynamice, kde volatilita okamžité spotové sazby sama o sobě nestačí k charakterizaci modelu úrokové sazby.

2.3.1 Obecný model

Obecně, v rámci HJM modelu, předpokládáme, že pro libovolné fixní T má okamžitá forwardová míra $f(t,T)$ vývoj (vzhledem k dané míře), který můžeme zapsat následující stochastickou diferenciální rovnicí

$$df(t,T) = m(t,T)dt + v(t,T)dW(t), \tag{2.3.1}$$

[1] Odvození i výpočet funkcí je založen na [20].

kde $W = (W_1, \ldots, W_n)$ je Brownův pohyb (obecně vícerozměrný), $v(t,T) = (v_1(t,T), \ldots, v_n(t,T))$ je vektor adaptovaných procesů a $m(t,T)$ je adaptovaný proces. Nadále v textu budeme pracovat s jednorozměrnou verzí tohoto modelu, tj. $n = 1$.

Model (2.3.1) není nutně bezarbitrážní. Heath, Jarrow a Morton dokázali, že neexistuje jednoznačná martingalová míra tak, aby funkce m byla volena libovolně, ale musí záviset na volatilitě v. Následující věta je podmínkou bezarbitrážnosti modelu.

Věta 7 *Pokud v modelu (2.3.1) uvažujeme rizikově neutrální dynamiku hodnoty bezkupónového dluhopisu (2.3.3), potom platí*

$$m(t,T) = v(t,T) \int_t^T v(t,u)du. \tag{2.3.2}$$

Důkaz. Víme, že platí následující rovnost pro $t \leq T < T^*$

$$f(t,T,T^*) = -\frac{\ln P(t,T^*) - \ln P(t,T)}{T^* - T},$$

kde $f(t,T,T^*)$ je forwardová sazba v čase t na období T až T^*. Diferenciál této forwardové sazby je potom roven

$$df(t,T,T^*) = \frac{d\ln P(t,T^*) - d\ln P(t,T)}{T^* - T}.$$

Využitím vztahu (2.3.4) získáme másledující rovnosti

$$\begin{aligned} d\ln P(t,T) &= \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,T)\right)dt + \sigma(t,T)dW(t), \\ d\ln P(t,T^*) &= \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,T^*)\right)dt + \sigma(t,T^*)dW(t). \end{aligned}$$

Odečteme-li od sebe tyto rovnice a vydělíme $T^* - T$ dostaneme rovnici pro změnu forwardové sazby ve tvaru

$$df(t,T,T^*) = \frac{\sigma^2(t,T^*) - \sigma^2(t,T)}{2(T^* - T)}dt - \frac{\sigma(t,T^*) - \sigma(t,T)}{T^* - T}dW(t).$$

Abychom dostali spojitou verzi HJM modelu, přejdeme limitně $T^* \to T$ k rovnici

$$df(t,T,T^*) = \sigma(t,T)\frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}dt - \frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}dW(t).$$

Potom můžeme zapsat rovnici pro změnu forwardové sazby ve tvaru

$$df(t,T,T^*) = m(t,T)dt + v(t,T)dW(t),$$

kde

$$\begin{aligned} m(t,T) &= \sigma(t,T)\frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}, \\ v(t,T) &= \frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Víme, že platí

$$\sigma(t,T) = \int_t^T \underbrace{\frac{\partial\sigma(t,u)}{\partial u}}_{v(t,u)},$$

protože $\sigma(t,t) = 0$. Po dosazení do $m(t,T)$ dostáváme

$$m(t,T) = v(t,T)\int_t^T v(t,u)du.$$

□

Tento důkaz je převzat z knihy [20].

Nechť T je pevné a dynamika procesu hodnoty bezkupónového dluhopisu $P(t,T)$ vzhledem k rizikově neutrální míře je

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + \sigma(t,T)P(t,T)dW(t), \tag{2.3.3}$$

což můžeme dle Itôovy formule upravit na

$$d\ln P(t,T) = \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,T)\right)dt + \sigma(t,T)dW(t). \tag{2.3.4}$$

Sazba $r(t)$ z předchozí rovnice je okamžitá spotová úroková sazba, kterou se zabývala předchozí kapitola. Víme, že platí rovnost

$$f(t,t) - f(0,t) = \int_0^t df(u,t), \text{ tj. } f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t df(u,t).$$

Okamžitá forwardová míra v čase t sjednaná na čas t je zřejmě rovna okamžité spotové míře $r(t)$. Tedy po dosazení rovnice pro změnu forwardové úrokové míry, viz rovnice (2.3.2), dostaneme rovnost

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t v(u,t)\int_u^t v(u,s)dsdu + \int_0^t v(u,t)du. \tag{2.3.5}$$

2.3.2 Markovská vlastnost

V rámci HJM modelu nemá obecně okamžitá úroková sazba markovskou vlastnost. To znamená, že hodnota $r(t)$ nezávisí pouze na její poslední známé hodnotě, ale na celé její historii. Tento fakt činí výpočty této sazby, i výpočty od této sazby odvozené, komplikovanější. Nicméně existuje taková volba volatility $v(t,T)$ tak, aby sazba $r(t)$ splňovala markovskou vlastnost.

Markovská vlastnost $r(t)$ je splněna, volíme-li[2] volatilitu následně

$$v(t,T) = \xi(t)\psi(T), \tag{2.3.6}$$

kde ξ a ψ jsou nenáhodné a kladné funkce času. Po dosazení do rovnice pro okamžitou úrokovou sazbu dostáváme

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \xi(u)\psi(t) \int_u^t \xi(u)\psi(s)dsdu + \psi(t) \int_0^t \xi(u)dW(u),$$

po úpravě získáme

$$r(t) = f(0,t) + \psi(t) \int_0^t \xi^2(u) \int_u^t \psi(s)dsdu + \psi(t) \int_0^t \xi(u)dW(u).$$

Označíme-li

$$A(t) = f(0,t) + \psi(t) \int_0^t \xi^2(u) \int_u^t \psi(s)dsdu, \tag{2.3.7}$$

potom derivace $r(t)$, za předpokladu diferencovatelnosti, dle t se rovná

$$dr(t) = A'(t)dt + \psi'(t)dt \int_0^t \psi(u)dW(u) + \psi(t)\xi(t)dW(t),$$

což můžeme zapsat ve tvaru

$$dr(t) = \left[A'(t) + \psi'(t)\frac{r(t) - A(t)}{\psi(t)}\right] dt + \psi(t)\xi(t)dW(t).$$

V modelech okamžité úrokové míry Ho-Lee a Hull-White je splněna markovská vlastnost $r(t)$. Ukážeme si podrobněji model Ho-Lee v rámci HJM. U modelu Hull-White si uvedeme pouze tvar volatility okamžité forwardové míry. Odvození dalších modelů okamžité úrokové sazby je popsáno v [2].

[2]Tato volba volatility i odvození jsou založena na [4]. Pro přehlednost budeme používat i stejné značení.

Nechť volatilita okamžitých forwardových sazeb $v(t,T) = \sigma$ je konstatní pro všechna t, T. Potom po dosazení do dynamiky forwardové sazby (2.3.1) splňující bezarbitrážní podmínku dle věty 7 dostáváme

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \int_0^t \sigma \int_u^T \sigma ds du + \int_0^t \sigma dW(u) \\ &= f(0,T) + \int_0^t \sigma^2 (T-u) du + \int_0^t \sigma dW(u). \end{aligned}$$

Funkce ψ a ξ jsou konstatní pro všechna t, T tak, že

$$\psi(t) = \sigma \quad \text{a} \quad \xi(T) = 1.$$

Potom dosazením do rovnice (2.3.7) získáme tvar

$$\begin{aligned} A(t) &= f(0,t) + \int_0^t \int_u^t \sigma^2 ds du \\ &= f(0,t) + \frac{(\sigma t)^2}{2}, \end{aligned}$$

který dále dosadíme do rovnice pro $r(t)$

$$r(t) = f(0,t) + \frac{(\sigma t)^2}{2} + \sigma \int_0^t dW(u).$$

Po zderivování dostáváme známý tvar dynamiky modelu Ho-Lee

$$dr(t) = \underbrace{\left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t \right)}_{b(t)} dt + \sigma dW(t).$$

U Hull-White modelu je volatilita tvaru

$$v(t,T) = \sigma e^{-a(T-t)},$$

kde a a σ jsou konstatní. Funkce ξ, ψ a A jsou tvaru

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sigma e^{at}, \\ \xi(T) &= e^{-aT}, \\ A(t) &= f(0,t) + e^{-at} \int_0^t \sigma^2 e^{-2au} \int_u^t e^{as} ds du \\ &= f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2. \end{aligned}$$

Dopočítání sazby $r(t)$ a její dynamiky $dr(t)$ pro Hull-White model je již zřejmé.

2.3.3 Dvourozměrný případ

Vzhledem k tomu, že aplikaci HJM modelu ve spojité podobě si nebudeme uvádět v analytické části této práce, uvedeme si nyní alespoň příklad chování forwardových sazeb v dvourozměrném případu HJM modelu. Konkrétně si ukážeme průběh forwadových sazeb pro různé doby do splatnosti.

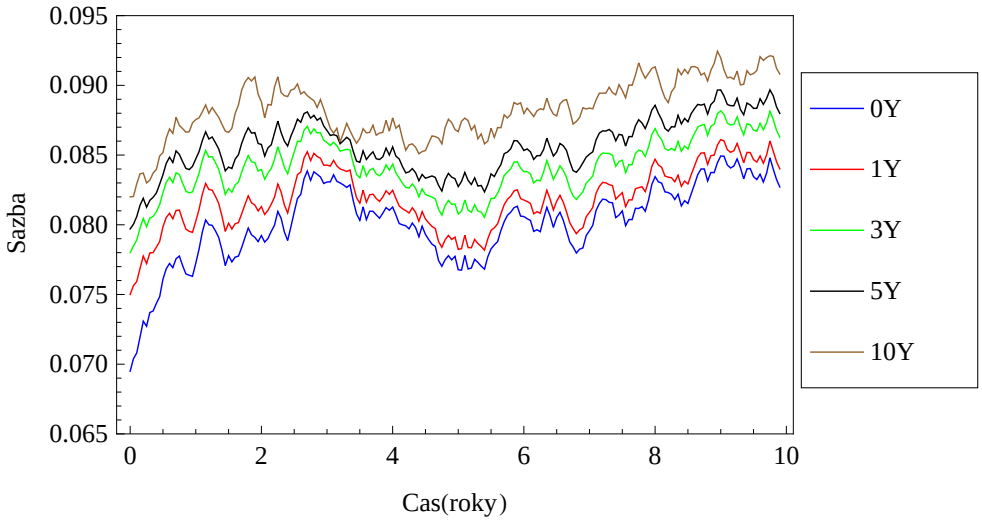
Předpokládejme, že existují dva rizikové faktory ovlivňující náhodný vývoj forwardových sazeb charakterizované dvěma různými Wienerovými procesy W_1 a W_2. Dále předpokládejme, že tyto faktory jsou vzájemně nezávislé a volatility mají tvar

$$\begin{aligned} v_1(t,T) &= 0,001, \\ v_2(t,T) &= 0,0009(8-(T-t)). \end{aligned}$$

Volatility jsou tedy funkcemi času - v_1 je konstatní a v_2 je funkcí t, T - a z toho plyne, že i drift je funkcí času. Počáteční okamžité forwardové sazby jsme zvolili dle následující tabulky

Splatnost	Forwardová sazba
0Y	0,069
1Y	0,072
3Y	0,076
5Y	0,079
10Y	0,082

Časový krok je roven $dt = 0,05$. Následující obrázek znázorňuje vývoj forwardových sazeb za výše uvedených předpokladů.



Obrázek 2.3: Vývoj forwardových sazeb simulovaný HJM modelem s výše uvedenými parametry

2.4 LIBOR Market Model

HJM rámec v sobě ukrývá dvě zásadní nevýhody, které odrazují od jeho používání. První nevýhodou je, že model je vyjádřen pomocí okamžitých forwardových sazeb, které nejsou přímo pozorovatelné na trhu. Druhou nevýhodou je obtížná kalibrace modelu na ceny obchodovaných instrumentů. Proto v roce 1997 navrhli Alan Brace, Dariusz Gatarek a Marek Musiela v materiálu [3] alternativu - tzv. LIBOR Market model (někdy také BGM model nebo Brace-Gatarek-Musiela model). LIBOR (London InterBank Offer Rate) je úroková sazba na londýnském mezibankovním trhu. Je využívána jako referenční sazba v úrokových derivátech (úrokové swapy, collar - tj. cap i floor) a na základě této sazby jsou kótovány forwardové kontrakty (FRA - forward rate agreement). Tato sazba je úročena jednoduše. Model lze samozřejmě vztáhnout k jakékoliv další mezibankovní úrokové sazbě se stejnou charakteristikou, např. PRIBOR, EURIBOR.

LIBOR Market model si můžeme představit jako diskrétní verzi HJM modelu. Tento model je mezi tradery velmi oblíbený vzhledem k tomu, že může ocenit libovolný kontrakt , jehož peněžní toky se dají rozložit na funkce pozorovaných forwardových sazeb. Nadále v textu budeme pracovat s diskrétními, na trhu pozorovatelnými, forwardovými sazbami, tj. sazbami, které jsou kótované na trhu.

V této kapitole budeme k LIBOR Market modelu přistupovat stejně jako John Hull (viz [10]). Tento přístup je názornější z hlediska diskretizace HJM

modelu i z hlediska implementace než přístup trojice BGM.

2.4.1 Odvození modelu

Nechť $t_0 = 0, t_1, \ldots$ jsou obnovovací časy capů (reset times), které jsou dnes obchodované na trhu. Můžeme volit například obnovení po pololetí, tj. $t_1 = 0.5, t_2 = 1, \ldots$ Definujme $\tau_j = t_{j+1} - t_j$. Dále nechť $P(t,T)$ je opět cena bezkupónového dluhopisu v čase t se splatností v čase T a $L(t, t_j, t_{j+1})$ je forwardový LIBOR v čase t se začátkem v čase t_j a splatností v čase t_{j+1}. Připomeňme, že cena bezkupónového dluhopisu se stejně jako v HJM modelu řídí dynamikou (2.3.3). Vztah mezi forwardovou sazbou a cenou bezkupónového dluhopisu je

$$1 + L(t, t_j, t_{j+1}) = 1 + L(t, t_j, t_j + \tau_j) = 1 + \tau_j L(t, \tau_j) = \frac{P(t, t_j)}{P(t, t_{j+1})}, \quad (2.4.1)$$

kde $L(t, \tau_j)$ je forwardová sazba domluvená v čase t na období t_j a t_{j+1} vyjádřena pomocí časového období τ_j. Diskontní faktor je roven

$$\frac{1}{1 + \tau_j L(t, \tau_j)}. \quad (2.4.2)$$

Ještě jednou poznamenejme, že používáme jednoduché úročení narozdíl od spojitého, které je ve finanční matematice (zvlášť při oceňování akcií a jejich derivátů) používanější.

Až doposud jsme uvažovali jako numeraire bankovní účet (viz definice 13). Nyní je forwardová sazba martingalem vzhledem k hodnotě dluhopisu, tj. numeraire je nyní cena dluhopisu. Tato technika se nazývá *změna numeraire*, kdy hodnotu bankovního účtu $B(t)$ nahrazujeme hodnotou jiného aktiva $X^*(t)$. Důsledkem změny numeraire je i změna rizikově neutrální míry vyjádřená pomocí Radon-Nikodymovy derivace (viz definice 9). Formálně je tato technika pro obecnou změnu numeraire popsána v [4]. Pro lepší orientaci v textu budeme změnu míry při změně numeraire na $X^*(t)$ značit $Q\{X^*(t)\}$.

V rizikově neutrálním prostředí je sazba $L(t, \tau_j)$ $Q\{P(t, t_j)\}$-martingal, tj. vzhledem k numeraire $P(t, t_j)$, která se řídí dynamikou

$$dL(t, \tau_k) = \alpha_k(t) L(t, \tau_k) dW(t), \quad (2.4.3)$$

kde W(t) je Wienerův proces vzhledem k míře $Q\{P(t, t_j)\}$, α_k je volatilita forwardových sazeb v čase t. Nadále v této kapitole budeme uvažovat míru $Q\{P(t, t_j)\}$, pokud nebude řečeno jinak.

V praxi se ukazuje, že je vhodnější oceňovat úrokové deriváty ve forwardovém rizikově-neutrálním prostředí vzhledem k bezkupónovým dluhopisům

se splatností v dalším čase obnovy capu. Tzv. rolující forwardové rizikově-neutrální prostředí (dle [11] rolling forward risk-neutral world). V tomto prostředí můžeme pomocí sazby bezkupónového dluhopisu v čase t_k se splatností v t_{k+1} diskontovat z času t_{k+1} do času t_k. Nechť $i(t)$ je index dalšího data obnovy capu v čase t, tj. $i(t) = \min\{k \in \mathbb{N}; t \leq t_k\}$. V rolujícím forwardovém rizikově-neutrálním prostředí je forwardová sazba $Q\{P(t, t_{i(t)})\}$-martingalem. Pak se v tomto prostředí sazba $L(t, \tau_j)$ řídí dynamikou

$$dL(t, \tau_k) = \alpha_k(t)[\sigma_{i(t)}(t) - \sigma_{k+1}(t)]L(t, \tau_k)dt + \alpha_k(t)L(t, \tau_k)dW(t). \quad (2.4.4)$$

Rovnici (2.4.1) můžeme upravit na tvar

$$\ln \frac{P(t, t_j)}{P(t, t_{j+1})} = \ln P(t, t_j) - \ln P(t, t_{j+1}) = \ln(1 + \tau_j L(t, \tau_j)). \quad (2.4.5)$$

Na obě strany rovnice použijeme Itôovo lemma, protože cena dluhopisu i forwardová sazba jsou náhodné a řídí se vlastními stochastickými diferenciálními rovnicemi. Poznamenejme, že nyní používáme forwardovou míru ($Q\{P(t, t_j)\}$) z forwardově rizikově-neutrálního prostředí, tj. rovnici (2.4.3). Porovnáme-li koeficienty u Wienerova procesu získáme

$$\sigma_j(t) - \sigma_{j+1}(t) = \frac{\tau_j L(t, \tau_j)\alpha_j(t)}{1 + \tau_j L(t, \tau_j)}. \quad (2.4.6)$$

Po dosazení tohoto výsledku do (2.4.4) se $L(t, \tau_k)$ v rolujícím forwadovém rizikově-neutrálním prostředí řídí dynamikou

$$dL(t, \tau_k) = \sum_{j=i(t)}^{k} \frac{\tau_j L(t, \tau_j)L(t, \tau_k)\alpha_j(t)\alpha_k(t)}{1 + \tau_j L(t, \tau_j)}dt + \alpha_k L(t, \tau_k)dW(t). \quad (2.4.7)$$

Zmínili jsme, že HJM model je limitní verzí LIBOR Market modelu. To lze dokázat z předchozí rovnosti, kde $\tau_j \to 0$. Rovnici (2.4.7) můžeme přepsat na

$$dL(t, \tau_k) = L(t, \tau_k)\alpha_k(t) \sum_{j=i(t)}^{k} \frac{\alpha_j(t)L(t, \tau_j)}{1 + \tau_j L(t, \tau_j)} + \alpha_k(t)L(t, \tau_k)dW(t)$$

Pokud pošleme limitně τ_j k nule, potom $\alpha_j L(t, \tau_j)$ jde k okamžité forwardové volatilitě v čase t a člen

$$\sum_{j=i(t)}^{k} \frac{\alpha_j(t)L(t, \tau_j)}{1 + \tau_j L(t, \tau_j)}$$

jde k

$$\int_t^{t_k} v(t, u)du.$$

Nyní je již vidět, že

$$dL(t,\tau_k) = \left[v(t,t_k) \int_t^{t_k} v(t,u)du \right] dt + v(t,t_k)dW(t).$$

2.4.2 Forwardové volatility

Zjednodušme si výše popsaný model tak, že funkce $\alpha_k(t)$ je funkcí pouze celých období mezi datem obnovy capu a časem t_k. To znamená, že nás nezajímá, kdy daný okamžik obnovy capu nastane, ale za jak dlouho nastane. Nechť Λ_j je hodnota funkce $\alpha_k(t)$, kde j je počet výše zmíněných období. Z toho plyne, že $\alpha_k(t) = \Lambda_{k-i(t)}$ je schodovitá funkce. Teoreticky můžeme hodnoty Λ_j odhadnout pomocí volatilit, které byly použity k ocenění capletů[3] pomocí Blackova modelu, tzv. spotové volatility. Předpokládejme, že s_j je Blackova volatilita, která odpovídá období mezi t_j a t_{j+1}. Forwardové volatility získáme iterativně pomocí vztahu

$$s_j^2 t_j = \sum_{i=1}^{j} \Lambda_{k-i}^2 \tau_{i-1}. \tag{2.4.8}$$

V praxi se používají ekvidistatní časové okamžiky, tj. τ_j jsou stejné pro všechna j. Více o stanovení forwardových volatilit na základě reálných dat je popsáno v kapitole 2.6.

2.4.3 Implementace modelu

Nejpoužívanější implementací LIBOR Market modelu je simulace Monte Carlo[4]. Pokud dosadíme forwardové volatility

$$\alpha_k(t) = \Lambda_{k-i(t)} \tag{2.4.9}$$

do rovnice (2.4.7) dostáváme vztah

$$\frac{dL(t,\tau_k)}{L(t,\tau_k)} = \Lambda_{k-i(t)} \sum_{j=i(t)}^{k} \frac{\tau_j \Lambda_{j-i(t)} L(t,\tau_j)}{1+\tau_j L(t,\tau_j)} + \Lambda_{k-i(t)} L(t,\tau_k) dW(t). \tag{2.4.10}$$

Pomocí Itoôva lemmatu můžeme tuto rovnici upravit na použitelnější tvar

$$d \ln L(t,\tau_k) = \left[\sum_{j=i(t)}^{k} \frac{\tau_j L(t,\tau_j) \Lambda_{k-i(t)} \Lambda_{j-i(t)}}{1+\tau_j} - \frac{\Lambda_{k-i(t)}^2}{2} \right] dt + \Lambda_{k-i(t)} dW(t). \tag{2.4.11}$$

[3] Caplet je cap s jedním výplatním datem, tj. cap lze chápat jako portfolio capletů.
[4] Monte Carlo simulace je podrobně popsána i s aplikacemi v [27]

Při samotné aplikaci tohoto výpočtu předpokládáme, že pro drift platí $L(t,\tau_j) = L(t_i,\tau_j)$ pro $t_i < t_{i+1}$. Potom

$$L(t_{j+1},\tau_k) = L(t_j,\tau_k)\exp\left\{\left[\sum_{j=i+1}^{k}\frac{\tau_j L(t_i,\tau_j)\Lambda_{j-i-1}\Lambda_{k-i-1}}{1+\tau_j L(t_i,\tau_j)} - \frac{\Lambda_{k-i-1}^2}{2}\right]\tau_i + \Lambda_{k-i-1}\varepsilon\sqrt{\tau_i}\right\}, \tag{2.4.12}$$

kde ε je náhodná veličina se standardizovaným normálním rozdělením ($\varepsilon \sim N(0,1)$).

2.5 Ocenění opcí

V této kapitole se budeme zabývat oceněním evropských opcí pomocí výše uvedených modelů. Nebudeme zde odvozovat Black-Scholesův model, tomu se věnuje velké množství publikací např. [7], [5]. Poznamenejme však, že cena evropské call-opce, resp. put-opce, v okamžiku expirace T má hodnotu

$$\max\{S_T - K; 0\}, \quad \text{resp. } \max\{K - S_T; 0\},$$

kde S_T je cena podkladového aktiva v čase T a K je realizační cena (angl. strike-price).

V okamžiku $t < T$ je cena evropské call-opce $c(t)$, resp. put-opce $p(t)$, rovna

$$D(t,T)E[\max\{S_T - K; 0\}|S_t], \quad \text{resp. } D(t,T)E[\max\{K - S_T; 0\}|S_t]$$

kde $D(t,T)$ je diskontní faktor. Výsledkem je

$$c(t) = S_t\Phi(d) - KD(t,T)\Phi(d - \sigma\sqrt{T-t}),$$

resp.

$$p(t) = -S_t\Phi(-d) + KD(t,T)\Phi(-d + \sigma\sqrt{T-t}),$$

kde Φ je distribuční funkce rozdělení N(0,1).

Cena evropské opce v čase t s realizační cenou X, expirací T s bezkupónovým dluhopisem jako podkladovým aktivem se splatností v čase T^* byla odvozena Farshidem Jamshidianem v článku [15]. Jamshidian využil známého rozdělení $r(T)$ a do podmíněné střední hodnoty $E_t\left[D(t,T)H(T)\right]$ dosadil $H(T) = \max\{P(T,T^*) - X\}$. Odvodil, že cena opce na bezkupónový dluhopis je rovna

$$\text{ZBO}(t,T,T^*,X) = \alpha\left[P(t,S)\Phi(\alpha h) - XP(t,T)\Phi(\alpha(h - \Sigma(t,T)))\right], \tag{2.5.1}$$

kde $\alpha = 1$, resp. $\alpha = -1$, pro call-opci, resp. put-opci. Parametry h a $\Sigma(t,T)$ si uvedeme u Hull-White modelu.

2.5.1 Short-rate modely

Ukážeme si aplikaci metodiky ocenění opcí i na Hull-White a Ho-Lee modelu. Nebudeme zde uvádět ocenění opce pro Vašíčkův model, protože je, až na ceny bezkupónových dluhopisů, ekvivalentní Hull-White modelu.

Nejdříve odvodíme cenu evropské call-opce (resp. put-opce) na bezkupónový dluhopis a cenu capu (resp. flooru) pomocí Hull-White modelu. Ocenění pomocí Ho-Lee modelu probíhá analogicky, proto oba modely uvádíme v rámci jedné kapitoly.

Již víme, že Hull-White model má afinní strukturu časových měr, tedy hodnotu bezkupónového dluhopisu můžeme vyjádřit ve tvaru

$$P(t,T) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)r(t)\}.$$

Kvůli dalším výpočtům si připomeňme i tvar funkce B

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Jako první oceníme evropskou call-opci, kde podkladovým aktivem je bezkupónový dluhopis se splatností T^*. Tato opce má realizační cenu K a expiruje v čase T, předpokládáme, že $T < T^*$. Výplatní funkce v čase expirace T je rovna

$$\Psi_{call}(T) = \max\{(P(T,T^*) - K); 0\}. \tag{2.5.2}$$

Volme bezkupónový dluhopis s časem expirace v čase T jako numeraire, potom je proces $Z(t)$ definován jako

$$Z(t) = \frac{P(t,T^*)}{P(t,T)}.$$

Je zapotřebí ukázat, že proces $Z(t)$ má nenáhodnou volatilitu. Po dosazení rovnice pro bezkupónový dluhopis dostáváme

$$Z(t) = \exp\{A(t,T^*) - A(t,T) - (B(t,T^*) - B(t,T))r(t)\}.$$

Na proces $Z(t)$ použijeme Itôovu formuli a vyjde nám koeficient u Wienerova procesu ve tvaru

$$\sigma_Z(t) = -\sigma(B(t,T^*) - B(t,T)) = -\frac{\sigma}{a}\left(-e^{-a(T^*-t)} + e^{-a(T-t)}\right) = -\frac{\sigma e^{at}}{a}\left(e^{-aT} - e^{-aT^*}\right).$$

Potom cena evropské call-opce za výše uvedených podmínek dle Hull-White modelu je

$$Call(P(t,T^*),t,T,T^*,K) = P(t,T^*)\Phi(h) - KP(t,T)\Phi(h - \Sigma(t,T)), \tag{2.5.3}$$

kde

$$h = \frac{1}{\Sigma(t)} \ln \frac{P(t,T^*)}{KP(t,T)} + \frac{\Sigma(t,T)}{2} \tag{2.5.4}$$

a

$$\begin{aligned}
\Sigma^2(t,T) &= \int_t^T \sigma_Z^2(u)du \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T e^{2au} \left(e^{-aT} - e^{-aT^*}\right)^2 du \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^3} \left(e^{2aT} - e^{2at}\right) \left(e^{-aT} - e^{-aT^*}\right)^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^3} \left(1 - e^{-2a(T-t)}\right) \left(1 - e^{-a(T^*-T)}\right)^2,
\end{aligned}$$

takže po pár algebraických úpravách a dosazení funkce B dostaneme

$$\Sigma(t,T) = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(T-t)}}{2a}} B(T,T^*). \tag{2.5.5}$$

Pomocí put-call parity můžeme analogicky ocenit put-opci na bezkupónový dluhopis se stejnými parametry ve tvaru

$$Put(P(t,T^*),t,T,T^*,K) = -P(t,T^*)\Phi(-h) + KP(t,T)\Phi(-h + \Sigma(t,T)), \tag{2.5.6}$$

U modelu Ho-Lee se změní pouze člen $\sigma_Z(t)$, který je po stejném postupu a dosazením funkce $B(t,T) = T - t$ roven

$$\sigma_Z(t) = \sigma(T^* - T). \tag{2.5.7}$$

Oba typy opcí se ocení stejně jako u Hull-White modelu s výjimkou členu $\Sigma(t,T)$, který je roven

$$\begin{aligned}
\Sigma^2(t,T) &= \int_t^T \sigma_Z^2(u)du \\
&= \sigma^2(T - T^*)^2(T - t),
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

po odmocnění

$$\Sigma(t,T) = \sigma B(T,T^*) \sqrt{B(t,T)}. \tag{2.5.9}$$

Nyní si oceníme cap (úrokovou call-opci) - floor (úrokovou put-opci) dopočítáme put-call paritou - pomocí Hull-White modelu. Uvažujme cap sjednaný

v čase t s expirací v čase T na úrokovou sazbu i na období $\tau = T^* - T$ a realizační sazbou X. Hodnota výplatní funkce v čase expirace opce je rovna

$$\Psi_{cap}(i, T, \tau, X) = \frac{1}{1 + i\tau} \max(\tau(i - X); 0)$$

Odvodíme cenu capu pomocí put-opce s expirací v čase T na bezkupónový dluhopis se splatností v čase $T + \tau = T^*$. Nejdříve si ukážeme, jaký je vztah mezi výplatními funkcemi capu a put-opcí

$$\begin{aligned}
\Psi_{put}(i, T, \tau, K) &= \max\left(K - \frac{1}{1 + i\tau}; 0\right) \\
&= \frac{1}{1 + i\tau} \max\left(K + i\tau K - 1; 0\right) \\
&= \frac{K}{1 + i\tau} \max\left(\tau\left(i - \frac{1 - K}{\tau K}\right); 0\right) \\
&= K\Psi_{cap}\left(i, T, \tau, \frac{1 - K}{\tau K}\right).
\end{aligned}$$

Z rovnice

$$X = \frac{1 - K}{\tau K}$$

vypočítáme hodnotu K, která se rovná

$$K = \frac{1}{1 + \tau X}.$$

Potom můžeme vztáhnout tuto rovnost k času t, ve kterém dostáváme rovnost

$$Cap(t, T, \tau, X) = (1 + \tau X) Put\left(P(t, T^*), t, T, T^*, \frac{1}{1 + \tau X}\right). \qquad (2.5.10)$$

Pro floor je rovnost ve tvaru

$$Floor(t, T, \tau, X) = (1 + \tau X) Call\left(P(t, T^*), t, T, T^*, \frac{1}{1 + \tau X}\right). \qquad (2.5.11)$$

Hodnotu capu a flooru lze samozřejmě vztáhnout k modelu Ho-Lee i Vašíčkovu modelu. Lišit se budou pouze v hodnotách call-opcí, resp. put-opcí, jejichž výpočet jsme u všech modelů uvedli.

2.5.2 LIBOR Market model

Připomeňme, že pracujeme s mírou $Q\{P(t, t_k)\}$. Dynamiku forwardové LIBOR sazby jsme si zavedli ve tvaru

$$dL(t, \tau_k) = \alpha_k(t) L(t, \tau_k) dW(t), \ t < T_{k-1},$$

kde $L(t,\tau_k) = L(t,T_k,T_k+\tau)$. Ukážeme si ocenění capletu s expirací v čase T_k, s realizační sazbou K, s obnovením v čase T_{k-1}. Výplatní funkce v okamžiku expirace je rovna

$$\max\{L(t,\tau_k) - K; 0\}.$$

To znamená, že caplet vyplácí v okamžiku expirace T_k rozdíl mezi sazbou v čase T_k se splatností v $T_k + \tau$ obnovenou (resetovanou) v čase T_{k-1} a realizační sazbou K.

Abychom získali cenu evropské call-opce je potřeba spočítat střední hodnotu ve tvaru

$$E[\max\{L[t,\tau_k] - K; 0\}]. \tag{2.5.12}$$

Pro ocenění úrokové opce je pro nás důležité, že se jedná o logaritmicko-normální model (tj. trh se chová lognormálně) s nulovým členem u dt. Jelikož se jedná o lognormální trh, můžeme použít klasický Black-Scholesův vzorec pro ocenění opce na akcii, ale nyní naší „akcií“ bude forwardová LIBOR sazba, „realizační cena“ je realizační sazbou a volatilita je rovna $\alpha_k(t)$. Na základě těchto úvah je v [4] uvedeno a postupně dokázáno toto tvrzení.

Tvrzení 1 *Cena capletu na sazbu modelovanou pomocí LIBOR Market modelu se rovná odpovídajícímu Blackovu vzorci pro caplet, tj.*

$$\begin{aligned} Caplet_{LIBOR}(t,\tau_k,T_{k-1},T_k,K) &= Caplet_{Black}(t,\tau_k,T_{k-1},T_k,K,v_k) \\ &= P(t,T_k)\tau_k Black(K,L(t,\tau_k),v_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Black(K,L(t,\tau_k),v_k) &= E[\max\{L(t,\tau_k) - K; 0\}] \\ &= L(t,\tau_k)\Phi(d) - K\Phi(d - v_k), \end{aligned}$$

$$d = \frac{\ln(L(t,\tau_k)/K) + v_k^2/2}{v_k},$$

kde

$$v_k^2 = \int_t^{T_k} \alpha_k^2(s)ds.$$

Předpokládejme, že volatilita $\alpha_k(t) = \alpha$ je konstatní. Potom se výpočet zjednodušší na známější formu Blackova vzorce

$$\begin{aligned} v_k^2 &= \alpha^2(T_k - t) \\ d &= \frac{\ln(L/K) + \alpha^2(T_k - t)/2}{\alpha\sqrt{T_k - t}}. \end{aligned}$$

2.6 Kalibrace modelů

Výše uvedené modely obsahují parametry, které je zapotřebí odhadnout. V uvedených příkladech jsme tyto parametry volili libovolně, bez ohledu na dnešní a historicky pozorovaná data. Obecně chceme, aby tyto modely byly co nejpřesnější vzhledem k dnešním a historickým datům, a aby co nejlépe odhadovaly budoucnost. Tato technika se nazývá *kalibrace modelů* na skutečná data.

Kalibrace modelů na reálná data, např. na ceny bezkupónových dluhopisů, probíhá tak, že nejdříve chceme, aby ceny bezkupónových dluhopisů byly stejné jako dnešní napozorované ceny. Tyto ceny jsou výchozím bodem pro výpočet cen dluhopisů v budoucnosti. Zároveň je také zapotřebí zahrnout do výpočtů tzv. tržní cenu rizika nebo ekvivalentně pomocí Girsanovovy věty změnit rizikově netutrální míru Q na míru P (tj. střední hodnota je teď vzhledem k míře P), která odpovídá skutečnosti. Je třeba zdůraznit, že kalibrace modelů je jednou z nejdůležitějších částí modelování úrokových sazeb. Různé metody kalibrace mohou dávat pro stejný model velmi odlišné výsledky.

2.6.1 Vašíčkův model

Vašíčkův model je jedním z modelů, které můžeme kalibrovat analyticky. Obecně můžeme volit různé metody kalibrace. V této kapitole budeme Vašíčkův model kalibrovat pomocí metody maximální věrohodnosti (viz [1]). Dále bychom mohli kalibrovat model na ceny opcí (viz kapitola 2.5.1), na trhu zprostředkovatelné pomocí implikovaných volatilit, nebo bychom model mohli fitovat na výnosovou křivku (obecná metoda fitování výsonové křivky je popsána v [4], v různých softwarech se využívá regresní model (viz [1]).

Z kapitoly (2.2.1) víme, že $r(t)$ mají normální rozdělení. Označme v^2 jako rozptyl $r(t)$ a nechť $\theta = e^{-a(t-s)}$, kde $t-s$ je rovno jednomu dni. Uvažujme, že máme k dispozici n pozorování sazeb $\mathbf{r} = (r_0, ..., r_{n-1})$. Potom

$$r_{i+1} = \theta \cdot r_i + b(1-\theta) + \varepsilon_i, \tag{2.6.1}$$

kde $\varepsilon_i \sim N(0, v^2)$. Věrohodnostní funkce vypadá následovně

$$L(\mathbf{r}, \theta, b, v^2) = \prod_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{1}{2\pi v^2}} \exp\left\{ -\frac{(r_i - \theta r_{i-1} - b(1-\theta))^2}{2v^2} \right\} \tag{2.6.2}$$

a logaritmus z věrohodnostní funkce

$$\log L = \log\left(\frac{1}{2\pi v^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(r_i - \theta r_{i-1} - b(1-\theta))^2}{2v^2}. \tag{2.6.3}$$

Odvodíme parciální derivace a položíme je rovny nule

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2v^2}\cdot 2\sum_{i=1}^{n-1}(r_i-\theta r_{i-1}-b(1-\theta))(b-r_{i-1})=0,\\ \frac{\partial \log L}{\partial b} &= -\frac{1}{2v^2}\cdot 2\sum_{i=1}^{n-1}(r_i-\theta r_{i-1}-b(1-\theta))(\theta-1)=0.\end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme následující rovnice

$$\sum_{i=1}^{n-1}(r_i-\theta r_{i-1}-b(1-\theta))(b-r_{i-1}) = 0, \tag{2.6.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}(r_i-\theta r_{i-1}-b(1-\theta))(\theta-1) = 0. \tag{2.6.5}$$

Poté dopočítáme z rovnice (2.6.5) hodnotu pro b

$$(\theta-1)(n-1)b(1-\theta) = \sum_{i=1}^{n-1}(r_i-\theta r_{i-1})(\theta-1) \tag{2.6.6}$$

$$b = \frac{1}{(n-1)(1-\theta)}\sum_{i=1}^{n-1}(r_i-\theta r_{i-1}). \tag{2.6.7}$$

Po roznásobení rovnice (2.6.4) dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n-1} br_i-\theta\sum_{i=1}^{n-1} br_{i-1}-(n-1)\theta^2(1-\theta)-\sum_{i=1}^{n-1} r_ir_{i-1}+\theta\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}^2+\sum_{i=1}^{n-1} b(1-\theta)r_{i-1}=0.$$

Po dosazení za b z rovnice (2.6.7) a po několika algebraických úpravách získáme rovnici

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}\sum_{i=1}^{n-1} r_i-\frac{\theta}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}\right)^2-\sum_{i=1}^{n-1} r_ir_{i-1}+\theta\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}^2 &= 0\\ \sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}\sum_{i=1}^{n-1} r_i-\theta\left(\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}\right)^2-(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} r_ir_{i-1}+\theta(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}^2 &= 0.\end{aligned}$$

Z předchozích úprav již dostáváme vzorec pro odhad parametru θ. Tento odhad budeme značit $\widehat{\theta}$ a je roven

$$\widehat{\theta}=\frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} r_ir_{i-1}-\sum_{i=1}^{n-1} r_i\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}}{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}\right)^2}. \tag{2.6.8}$$

Z předchozích výpočtů můžeme odvodit i hodnoty ostatních parametrů modelu

$$\widehat{a} = -\frac{\log\left(\widehat{\theta}\right)}{t-s} \tag{2.6.9}$$

$$= -\frac{1}{t-s}\log\left(\frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} r_i \sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}}{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} r_{i-1}\right)^2}\right), \tag{2.6.10}$$

$$\widehat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\left(r_i - \widehat{\theta} r_{i-1}\right)}{(n-1)\left(1-\widehat{\theta}\right)}. \tag{2.6.11}$$

Pomocí rovnice (2.2.6) můžeme dopočítat i odhad posledního parametru Vašíčkova modelu jako

$$\widehat{v}^2 = \frac{2\widehat{a}\sum_{i=1}^{n-1}\left(r_i - \widehat{\theta} r_{i-1} - \widehat{b}(1-\widehat{\theta})\right)^2}{(n-1)\left(1-\exp\{-2\widehat{a}(t-s)\}\right)}. \tag{2.6.12}$$

2.6.2 Ho-Lee model

Připomeňme, že Ho-Lee model je zadán rovnicí

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma dW(t).$$

Tento model má afinní strukturu, protože stochastickou diferenciální rovnici lze zapsat ve tvaru (2.2.44), kde

$$\alpha(t) = 0 \qquad \beta(t) = b(t),$$

$$\gamma(t) = 0 \qquad \delta(t) = \sigma^2.$$

Po dosazení těchto funkcí do soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (2.2.46) získáme následující soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(t,T))}{\partial t} &= -1 \\ \frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - b(t)B(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}B(t,T)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

$B(t,T)$ můžeme vypočítat samostatně

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B(t,T))}{\partial t} &= -1 \\
\int_t^T dB(s,T) &= -\int_t^T ds \\
\underbrace{B(T,T)}_{=0} - B(t,T) &= -(T-t) \\
B(t,T) &= T-t.
\end{aligned}$$

Nyní můžeme $B(t,T)$ dosadit do druhé rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - b(t)B(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}B(t,T)^2 &= 0 \\
\int_t^T dA(s,T) &= \int_t^T b(s)(T-s)ds - \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T (T-s)^2 ds \\
A(T,T) - A(t,T) &= \int_t^T b(s)(T-s)ds - \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 \\
A(t,T) &= -\int_t^T b(s)(T-s)ds + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3.
\end{aligned}$$

Funkci $b(t)$ známe, volili jsme ji tak, abychom modelem fitovali počáteční hodnotu bezkupónového dluhopisu (viz rovnice (2.2.12)). Pokud funkci $b(t)$

dosadíme do $A(t,T)$ dostaneme

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= -\int_t^T \left(\frac{\partial f(0,s)}{\partial s} + \sigma^2 s\right)(T-s)ds + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 \\
&= -\int_t^T \frac{\partial f(0,s)}{\partial s}(T-s)ds - \int_t^T \sigma^2 s(T-s)ds + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 \\
&= -\int_t^T \left(\frac{\partial f(0,s)}{\partial s}(T-s) + f(0,s) - f(0,s)\right)ds \\
&\quad -\frac{\sigma^2\left(T^3 - 3Tt^2 - 2t^3\right)}{6} + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6} \\
&= -\int_t^T \frac{\partial f(0,s)(T-s)}{\partial s}ds - \int_t^T f(0,s)ds - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2 \\
&= f(0,t)(T-t) + \underbrace{\int_t^T d\ln P(0,s)}_{\text{dle věty 5}} - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2 \\
&= f(0,t)(T-t) + \ln P(0,T) - \ln P(0,t) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2.
\end{aligned}$$

Funkce $A(t,T)$ pro Ho-Lee model se uvádí ve tvaru

$$A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + f(0,t)(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2,$$

nebo ve tvaru

$$A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} - \frac{\partial \ln P(0,s)}{\partial s}(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2.$$

Označme $P^M(0,T)$ počáteční napozorované ceny bezkupónových dluhopisů se splatností v čase T a $P(0,T)$ jsou modelové ceny. Empirické forwardové sazby $f^M(0,T)$ se rovnají

$$f^M(0,T) = -\frac{\partial \ln P^M(0,T)}{\partial T}.$$

Nyní nám jen stačí dosadit počáteční tržní hodnoty dluhopisů do připravené funkce $b(t)$, spočítat funkce A a B a dosadit do rovnice pro $P(t,T)$. Funkce $b(t)$ je po dosazení ve tvaru

$$b(t) = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t \tag{2.6.14}$$

a budoucí hodnota bezkupńového dluhopisu je rovna

$$P(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} \exp\left\{ -\frac{\partial \ln P^M(0,s)}{\partial s}(T-t) - \frac{\sigma^2}{2} t(T-t)^2 - (T-t)r(t) \right\}. \tag{2.6.15}$$

Kalibraci volatility σ zde nebudeme ukazovat. V rámci této práce budeme předpokládat, že σ je konstantní a budeme ji odhadovat jako směrodatnou odchylku absolutních výnosů okamžité spotové sazby příslušnou danému obdobu (např. denní). Více o zobecněné volatilitě i její kalibraci lze najít v [4].

2.6.3 Hull-White model

Připomeňme, že Hull-White model je zadán rovnicí

$$dr(t) = [b(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t).$$

Tento model má afinní strukturu, protože stochastickou diferenciální rovnici lze zapsat ve tvaru (2.2.44), kde

$$\alpha(t) = a \qquad \beta(t) = b(t),$$

$$\gamma(t) = 0 \qquad \delta(t) = \sigma^2.$$

Po dosazení těchto funkcí do soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (2.2.46) získáme následující soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(t,T))}{\partial t} - aB(t,T) &= -1, \\ \frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - b(t)B(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}B(t,T)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.6.16}$$

$B(t,T)$ můžeme opět vypočítat samostatně, ale nyní zavedeme počáteční podmínku $\ln B(T,T) = 0$

$$\frac{\partial B(t,T))}{\partial t} - aB(t,T) = -1$$

Tuto obyčejnou diferenciální rovnici spočítáme pomocí variace konstant. Nejdříve dopočítáme partikulární řešení

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(t,T))}{\partial t} &= aB(t,T) \\ -\ln B(t,T) &= a(T-t) + c(t) \\ B(t,T) &= c(t)e^{-a(T-t)} \end{aligned}$$

po zderivování a dopočítání obyčejné diferenciální rovnice pro $c(t)$ dostaneme

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Nyní můžeme $B(t,T)$ dosadit do druhé rovnice

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - b(t)\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2 = 0.$$

Funkci $b(t)$ známe, volili jsme ji tak, abychom modelem fitovali počáteční hodnotu bezkupónového dluhopisu (viz rovnice (2.2.29)). Pokud funkci $b(t)$ dosadíme do $A(t,T)$ dostaneme

$$\begin{aligned} A(t,T) &= -\frac{1}{a}\int_t^T b(s)\left(1 - e^{-a(T-s)}\right)ds + \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T \left(1 - e^{-a(T-s)}\right)^2 ds \\ &= -\frac{1}{a}\int_t^T \left[\frac{\partial f(0,s)}{\partial s} + af(0,s) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2as}\right)\right]\left(1 - e^{-a(T-s)}\right)ds \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T \left(1 - e^{-a(T-s)}\right)^2 ds. \end{aligned}$$

Pro zintegrování členu $\frac{\partial f(0,s)}{\partial s}e^{-a(T-s)}$ využijeme derivaci složené funkce

$$\frac{\partial f(0,s)}{\partial s}e^{-a(T-s)} + af(0,s)e^{-a(T-s)} = \frac{\partial f(0,s)e^{-a(T-s)}}{\partial s}.$$

Po zintegrování, několika algebraických úpravách (nebudeme zde uvádět) a využití věty 5 dostaneme rovnost

$$A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + f(0,t)\underbrace{\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}}_{B(t,T)} - \frac{\sigma^2}{4a}\left(1 - e^{-2at}\right)\underbrace{\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right)^2}_{B(t,T)^2},$$

která se někdy uvádí ve tvaru

$$A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} - \frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t}B(t,T) - \frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)^2\left(1 - e^{-2at}\right).$$

Stejně jako u Ho-Lee modelu dosadíme počáteční tržní hodnoty bezkupónového dluhopisu do budoucí hodnoty. Opět jsme volili funkci $b(t)$ tak, aby model fitoval počáteční výnosovou křivku, takže

$$P^M(0,T) = P(0,T).$$

Potom

$$P(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} \exp\left\{ -\frac{\partial \ln P^M(0,t)}{\partial t} B(t,T) - \frac{\sigma^2}{4a} B(t,T)^2 \left(1 - e^{-2at}\right) - B(t,T) r(t) \right\}. \tag{2.6.17}$$

Hull-White model, narozdíl od Ho-Lee, obsahuje ještě konstantu a, kterou je také zapotřebí dopočítat. Tato konstanta se odhadne tak, že modelové ceny úrokových opcí (capů, resp. floorů) se nafitují na tržní ceny úrokových opcí. Výpočet modelové ceny opce pomocí Hull-White modelu byl ukázán v kapitole 2.5.1.

2.6.4 LIBOR Market model

U LIBOR Market modelu, stejně jako u ostatních modelů je několik způsobů, jak model kalibrovat na reálná data. Konkrétně chceme spočítat forwardové volatility Λ_i zmíněné v kapitole 2.4.2.

Můžeme postupovat dle rovnice 2.4.8, nicméně v praxi se tento postup nevyužívá, protože vede k výrazným výkyvům volatilit Λ_i.

Další možností je model kalibrovat na ceny capletů, jejichž ocenění jsme si uvedli v kapitole 2.5.2. Kalibraci provádíme na aktuální tržní ceny capletu, takže čas t nahradíme časem 0. Dle tvrzení 1 se aktuální ceny capletu rovnají

$$\begin{aligned} Caplet_{LIBOR}(0, T_{k-1}, T_k, K) &= Caplet_{Black}(0, T_{k-1}, T_k, K, v_k) \\ &= P(0,T_k)\tau_k Black(K, L(0,\tau_k), v_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Black(K, L(0,\tau_k), v_k) &= E[\max\{L(0,\tau_{k-1}) - K; 0\}] \\ &= L(0,\tau_k)\Phi(d) - K\Phi(d - v_k), \end{aligned}$$

kde v_k se nezmění.

Ačkoliv je tato metoda konzistentní s konstrukcí LIBOR Market modelu, mezi praktiky je oblíbenější metoda kalibrace na ceny evropských swapcí (opce na swap)[5]. Nicméně obecně nejvíc využívaná metoda kalibrace LIBOR Market modelu je minimalizace sumy kvadrátů rozdílu mezi tržní cenou i-tého kalibrovaného instrumentu, ozn. X_i a modelovou cenou, ozn. Y_i, s přičtením tzv. penalizační funkce[6], tj.

$$\min\left\{ \sum_i (X_i - Y_i)^2 \right\} + P,$$

kde P je tvaru

$$P = \sum_i w_{1,i}(\Lambda_{i+1} - \Lambda_i) + \sum_i w_{2,i}(\Lambda_{i+1} + \Lambda_{i-1} - 2\Lambda_i)^2,$$

[5]Tuto metodu kalibrace si uvádět nebudeme. Její podrobnější popis, stejně jako ocenění swapce, lze najít v [9]

[6]Penalty function, viz [11].

kde $w_{1,i}$ a $w_{2,i}$ jsou váhy, které jsou voleny na základě zkušenosti tak, aby byla zajištěna hladkost volatilit Λ_i.

Penalizační funkce P slouží k tomu, aby se volatility Λ_i chovaly „hezky“, tj. aby například nedocházelo k velkým skokům.

Z poslední uvedené metody plyne, že si můžeme dosadit libovolné aktivum, např. caplet nebo swapci. Další metody kalibrace zaměřené přímo na LIBOR Market model jsou popsány v [26].

Kapitola 3

Analytická část

3.1 Popis obchodu a vstupní data

V této kapitole je popsán skutečný obchod uzavřený mezi stranou A a stranou B. Konkrétně se jedná o nestandardní úrokový swap z hlediska dvou plovoucích sazeb, zahrnutí collaru a výpočtu všech sazeb ke dnům splatnosti. Obě strany si nepřejí být zveřejněny vzhledem k tomu, že tento obchod ještě není vypořádán (viz kapitola 3.1.1).

3.1.1 Konfirmace obchodu

Konfirmace je písemným dokumentem obsahujícím konkrétní podmínky obchodu uzavřeného mezi stranou A a stranou B. Základní údaje z konfirmace potřebné k ocenění zmíněného úrokového swapu jsou následující:

Obecná ustanovení

Datum uzavření obchodu	19.6.2006
Počáteční datum	19.3.2006
Konečné datum	19.3.2013 s výhradou úpravy podle Modified Following Business Day Convention (jak je tento pojem definován v [13])
Nominální částka	5 389 000 000 CZK

Pohyblivé částky

Plátce pohyblivých částek	Strana A (dále jen „banka“)
Platební dny plátce pohyblivých částek	Každoročně každého 19.3., počínaje 19.3.2007 a konče Konečným datem, s výhradou úpravy podle Modified Following Business Day Convention (jak je tento pojem definován v [13])
Pohyblivá sazba	5,55% - Spread
Metoda výpočtu Pohyblivé sazby	Spread = 10Y (10-letá) CZK swapová sazba mínus 2Y (2-letá) CZK swapová sazba, stanovená zpětně
Úroková báze pro výpočet Pohyblivé částky	Actual/360 (jak je tento pojem definován v rámci definice Day Count Fraction v dokumenu [14])
Výpočet Pohyblivé částky	Nominální částka x Pohyblivá sazba x Úroková báze pro výpočet Pohyblivé částky
Úprava posledního dne Úrokového období	Upraven podle Modified Following Business Day Convention (jak je tento pojem definován v [13])
Obchodní dny pro platby	Praha

Pohyblivé částky

Plátce pohyblivých částek	Strana B (dále jen „investor“)
Platební dny plátce pohyblivých částek	Každoročně každého 19.3., počínaje 19.3.2007 a konče Konečným datem, s výhradou úpravy podle Modified Following Business Day Convention (jak je tento pojem definován v [13])
Pohyblivá sazba	CZK PRIBOR 12M + 1,55% za podmínek níže uvedeného Zvláštního ustanovení

Zvláštní ustanovení

v období od 20.3.2006 do 19.3.2007: CZK PRIBOR 12M + 1,55%

v období od 19.3.2007 do 19.3.2013: CZK PRIBOR 12M + 1,55%: maximální sazba 6,00% p.a. a minimální sazba viz níže:

- pro Úrokové období končící dnem 19.3.2008: 3,00% p.a.
- pro Úrokové období končící dnem 19.3.2009: 3,25% p.a.
- pro Úrokové období končící dnem 19.3.2010: 3,50% p.a.
- pro Úrokové období končící dnem 19.3.2011: 3,75% p.a.
- pro Úrokové období končící dnem 19.3.2012: 4,00% p.a.
- pro Úrokové období končící dnem 19.3.2013: 4,00% p.a.

Úroková báze pro výpočet Pohyblivé částky	Actual/360 (jak je tento pojem definován v rámci definice Day Count Fraction v dokumenu [14])
Výpočet Pohyblivé částky	Nominální částka x Pohyblivá sazba x Úroková báze pro výpočet Pohyblivé částky
Úprava posledního dne Úrokového období	Upraven podle Modified Following Business Day Convention (jak je tento pojem definován v [13])
Datum stanovení Pohyblivé sazby	2 pražské Obchodní dny před posledním Obchodním dnem každého Úrokového období
Obchodní dny pro platbu	Praha

Definice

Úrokový swap znamená Swapovým obdobím časově ohraničenou výměnu úroků z Nominální částky v příslušné měně.

Swapové období znamená období mezi Počátečním datem a Konečným datem.

Datum uzavření obchodu znamená den, kdy byl uzavřen obchod.

Počáteční datum znamená den sjednaný mezi smluvními stranami a uvedený v konfirmaci, který je současně prvním dnem počátečního Úrokového období.

Konečné datum znamená den sjednaný mezi smluvními stranami a uvedený v konfirmaci.

Nominální částka znamená částku jistiny (notional amount) sjednanou mezi smluvními stranami a uvedenou v konfirmaci, která je určující pro výpočet plnění obou stran úrokového swapu.

Pohyblivá částka znamená částku, kterou je při splnění sjednaných podmínek povinen zaplatit Plátce Pohyblivé částky.

Plátce Pohyblivé částky znamená smluvní stranu Úrokového Swapu takto sjednanou a uvedenou v konfirmaci, která je povinna platit Pohyblivou částku.

Platební den znamená ve vztahu k určité smluvní straně a určitému Úrokovému období každý den takto sjednaný v rámci obchodu ve vztahu k této smluvní straně a příslušnému Úrokovému období.

ISDA znamená asociaci International Swap Dealers Association, Inc., respektive International Swaps and Derivatives Association, Inc. se sídlem v New Yorku, N.Y.

Obchodní den znamená den, kdy jsou otevřeny a pracují banky a jsou prováděna vypořádání obchodů v daném městě.

Pohyblivá sazba znamená úrokovou sazbu, která je platná pro jednotlivá Úroková období uvedená v konfirmaci.

PRIBOR není-li v konfirmaci uvedeno jinak, znamená úrokovou sazbu per annum „offer“ pro CZK, která bude investorem pro výpočet jako

a) sazba vypočtená kalkulačním agentem pověřeným Českou národní bankou v 11:00 hodin pražského času druhý Obchodní den před prvním dnem příslušného Úrokového období, která je poté uvedena na obrazovce Reuters, na straně [PRBO] nebo jiné náhradní straně pro CZK, a to pro dobu trvání Úrokového období, nebo

b) v případě, že pro příslušné Úrokové období není PRIBOR na výše zmíněných stranách v příslušný den uveden, pak PRIBOR určí banka na základě PRIBORu pro nejbližší delší období, pro které je PRIBOR na výše zmíněných stranách v příslušný den uveden. Pokud není možno PRIBOR zjistit tímto způsobem, bude PRIBOR zjištěn jako průměrná sazba pro půjčky v CZK na příslušnou částku a příslušné úrokové období, kterou nabízejí Bance alespoň tři přední banky působící na českém mezibankovním trhu (zpravidla referenční banky ve smyslu pravidel České národní banky pro fixing referenčních sazeb PRIBID a PRIBOR) přibližně v 11:00 hodin druhý Obchodní den před prvním dnem příslušného Úrokového období, a to pro dobu trvání takového Úrokového období. Investor na základě těchto údajů vypočítá průměr těchto sazeb zaokrouhlených směrem nahoru na dvě desetinná místa. Tato sazba bude znamenat PRIBOR pro příslušné Úrokové období.

Úrokové období znamená období sjednané v rámci obchodu pro bližší specifikaci úrokových sazeb.

Datum stanovení Pohyblivé sazby znamená den, kdy je bankou pro výpočet stanovena Pohyblivá sazba platná pro následující Úrokové období.

3.1.2 Vstupní data a jejich vlastnosti

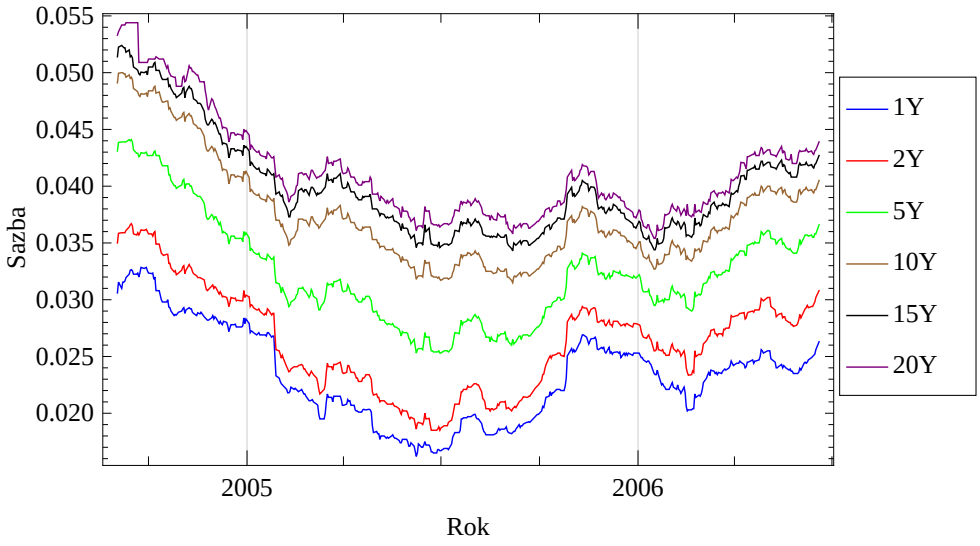
K ocenění úrokového swapu specifikovaného v předchozí kapitole máme k dispozici následující vstupní data:

a) sazba PRIBOR 12M,

b) swapové sazby se splatností 1 až 20 let(někdy také označované jako 1Y IRS - 20Y IRS - *interest rate swap*),

c) dostatečně dlouhá historie dat specifikovaných v předchozích bodech, konkrétně volíme 2-letou historii od 2.9.2004 do 19.6.2006.

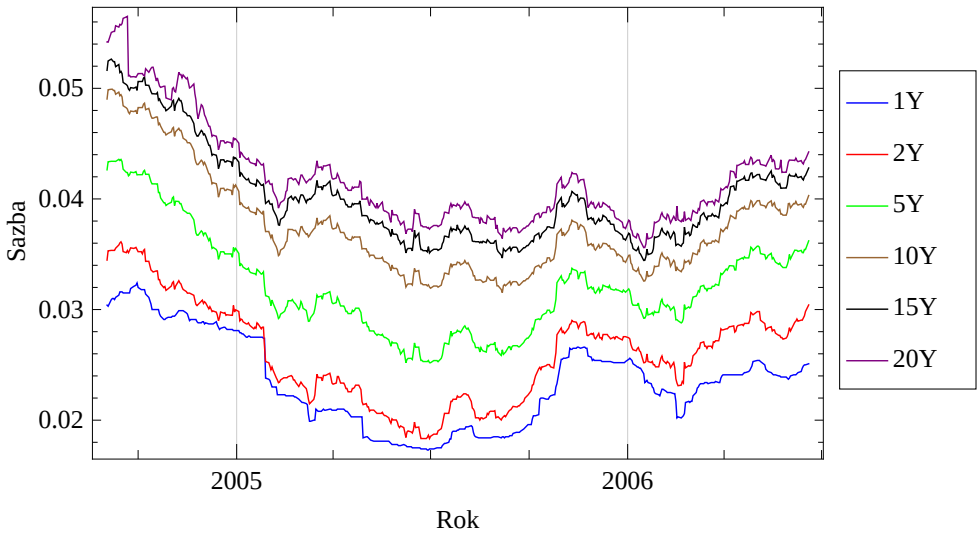
Sazbu PRIBOR potřebujeme dle konfirmace k ocenění pohyblivých plateb banky. Sazby PRIBOR jsme získali z internetového serveru http://www.cnb.cz. Swapové sazby potřebujeme dle konfirmace k ocenění pohyblivých plateb investora. Swapové sazby na 20 let budeme využívat v našich výpočtech, protože poslední swapová platba se odvíjí od 10 leté sazby v roce 2013, tj. splatnost je za 17 let od roku uzavření obchodu. Vzhledem k tomu, že swapové sazby jsou kótovány pro splatnosti 1Y,2Y,...,10Y, 12Y, 15Y, 20Y, dopočítáme ostatní sazby pomocí lineární interpolace. Swapové sazby jsme získali z internetového serveru http://www.patria.cz.



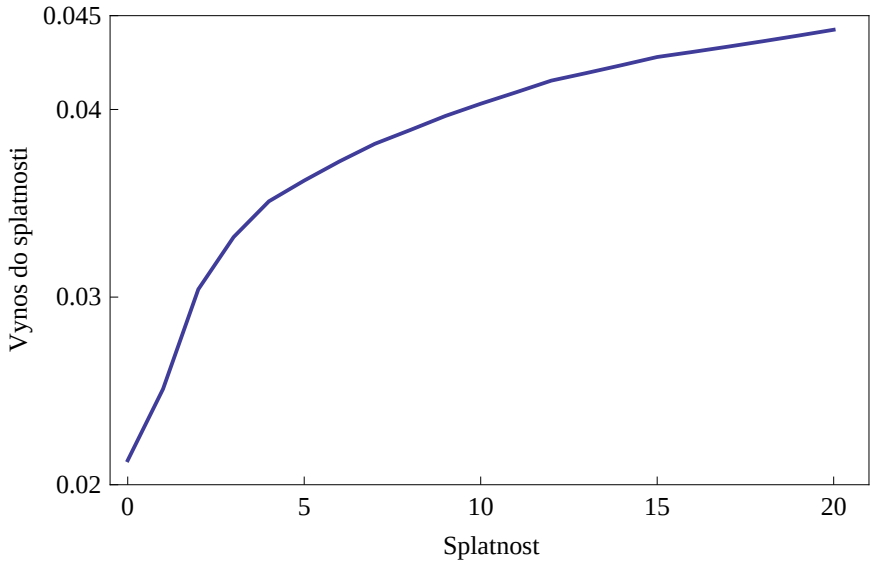
Obrázek 3.1: Vývoj swapových sazeb se splatnostmi 1Y,2Y,5Y,10Y,15Y a 20Y od 2.4.2004 do 19.6.2006

Sazby bezkupónového dluhopisu ze swapových sazeb spočítáme pomocí metody bootstrapping[1].

[1]Jedná se o metodu bootstrapping ve finanční matematice, ne statistice. Tuto metodu výpočtu sazeb bezkupónových dluhopisů ze swapových sazeb lze najít např. v [17]



Obrázek 3.2: Vývoj sazeb bezkupónových dluhopisů se splatnostmi 1Y,2Y,5Y,10Y,15Y a 20Y od 2.4.2004 do 19.6.2006

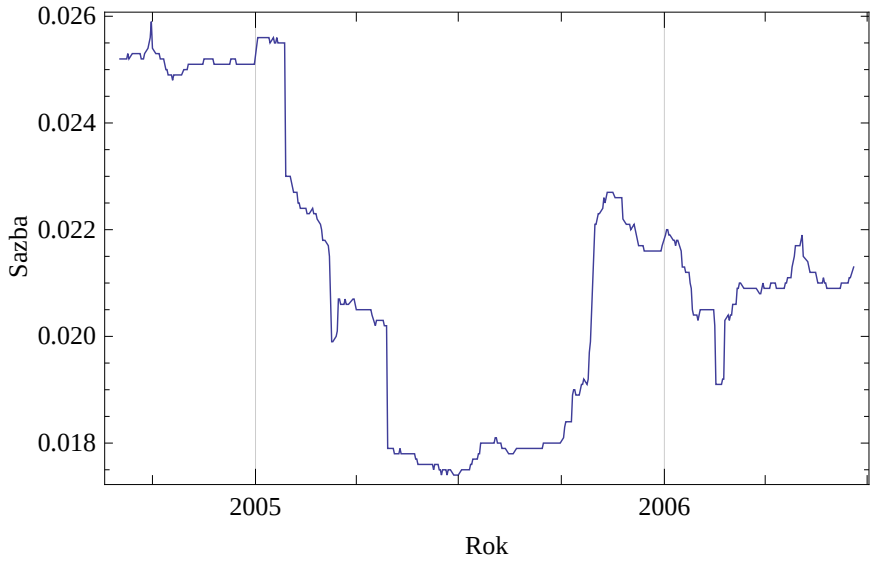


Obrázek 3.3: Výnosová křivka ke dni 19.6.2006

3.2 Aplikace modelů

3.2.1 Vašíčkův model

Vašíčkův model je jedním z short rate modelů, jak již bylo popsáno v kapitole 2.2.1. Jako okamžitou úrokovou sazbu jsme v tomto případě zvolili 3M PRIBOR z důvodů uvedených v komentáři definice 15.



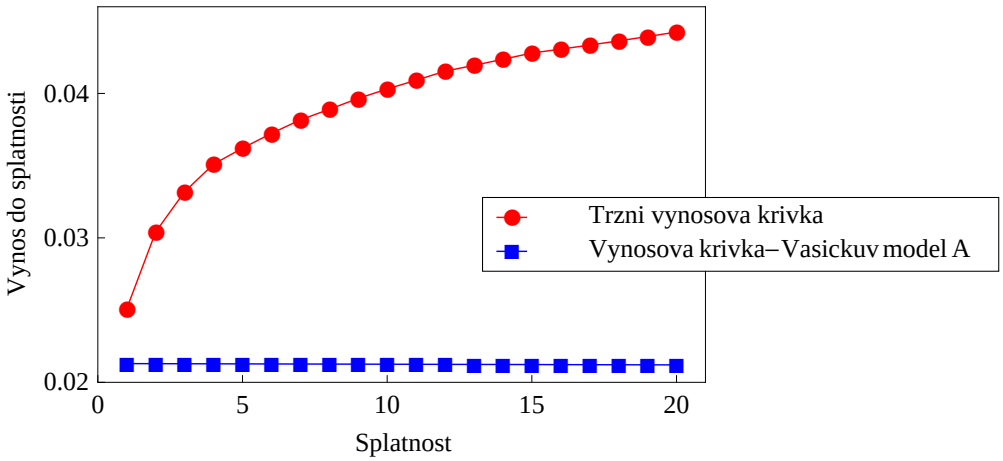
Obrázek 3.4: Vývoj 3M PRIBORu od 2.9.2004 do 19.6.2006

Nejdříve jsme všechny parametry Vašíčkůva modelu, ozn. *Vašíčkův model A*, kalibrovali metodou maximální věrohodnosti popsanou a odvozenou v kapitole 2.6.1. Hodnoty parametrů jsou v tabulce níže

Parametr	**Hodnota**
a	0,005638
b	0,019633
σ	0,000232

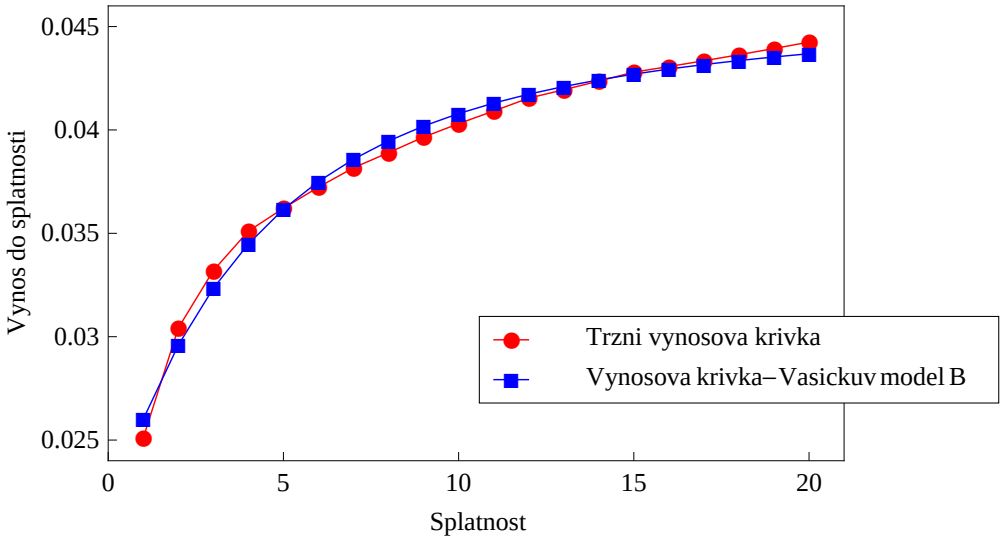
Tabulka 3.1: Hodnoty parametrů *Vašíčkova modelu A*

Pokud se podíváme na parametry vypočítané pouze z historických dat a na vývoj 3M PRIBORu, je logické, že hodnota parametru b (návratová hodnota sazby) je okolo 2%. Tento fakt je způsoben klesajícím trendem 3M PRIBOR sazby. Nicméně pokud porovnáme tržní výnosovou křivku a výnosovou křivku dopočítanou dle Vašíčkova modelu A, zjistíme, že modelová křivka neodpovídá té tržní.



Obrázek 3.5: Výnosová křivka dle Vašíčkova modelu a tržní výnosová křivka ke dni 19.6.2006

Proto jsme vypočítali parametry modelu jinou metodou kalibrace, ozn. *Vašíčkův model B*. Parametry a,b Vašíčkova modelu B (viz rovnice (2.2.1)) jsme určili nafitováním na výnosovou křivku bezkupónových dluhopisů, kterou jsme dopočítali ze swapových sazeb. Následující graf zobrazuje tržní výnosovou křivku a výnosovou křivku spočítanou dle Vašíčkova modelu B (viz (2.2.11)). Parametr σ jsme odhadli jako denní směrodatnou odchylku absolutních výnosů 3M PRIBOR sazby.



Obrázek 3.6: Výnosová křivka dle Vašíčkova modelu B a tržní výnosová křivka ke dni 19.6.2006

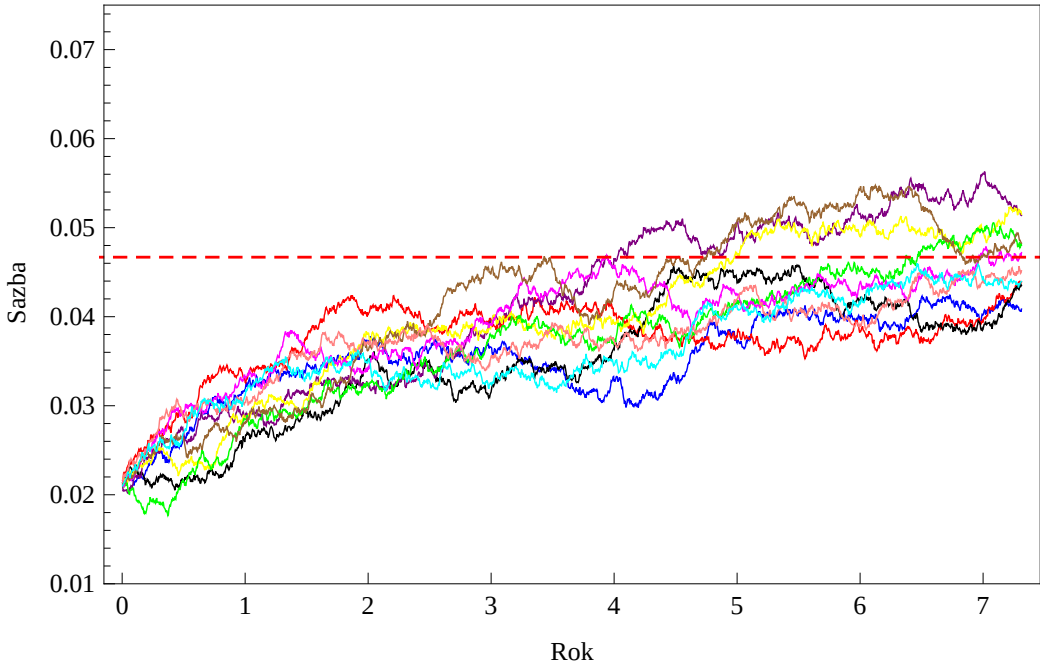
Z grafu je vidět, že výnosová křivka dopočítaná dle Vašíčkova modelu B

(dále jen „Vašíčkova modelu“) velmi dobře odpovídá tržní výnosové křivce. Parametry po kalibraci na výnosovou křivku a denní směrodatná odchylka 3M PRIBOR sazby jsou v tabulce níže.

Parametr	**Hodnota**
a	0,421311
b	0,0467039
σ	0.000232

Tabulka 3.2: Hodnoty parametrů Vašíčkova modelu B

Po nafitování tržní výnosové křivky je návratová hodnota parametru b přibližně rovna 4,6%. Vzhledem k tomu, že 3M PRIBOR je k 19.6.2006 roven hodnotě 2,13%, bude tato sazba růst ke zmíněné návratové hodnotě.



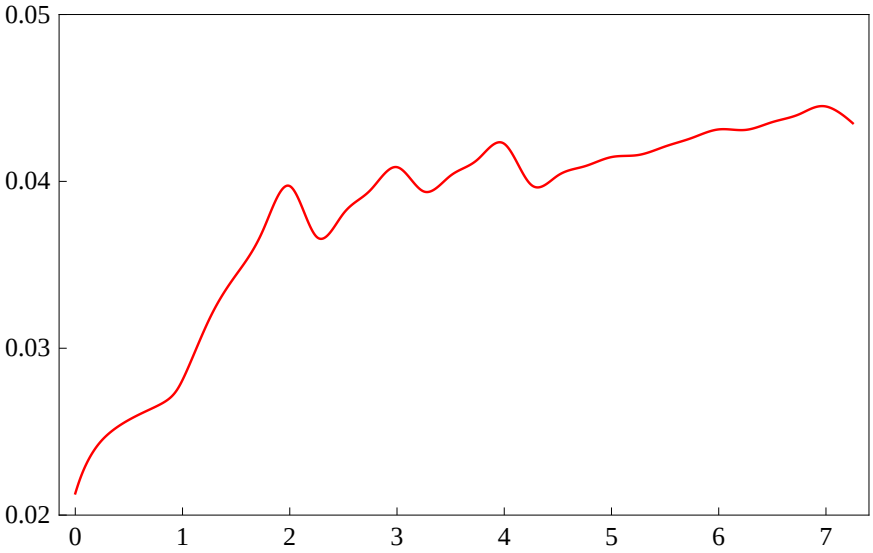
Obrázek 3.7: 10 simulací 3M sazby Vašíčkovým modelem

U Vašíčkova modelu můžeme vidět, že chování okamžité úrokové sazby, a z ní dopočítaných ostatních sazeb s delšími splatnostmi, je závislé pouze na trojici parametrů. Malý počet parametrů a jejich statičnost (parametry jsou konstatní) tento model znevýhodňují. Vašíčkův model se hodí pro ocenění klasických úrokových derivátů, např. cap, úrokový swap. Pro ocenění nestandardních, složitějších derivátů, tj. různé kombinace úrokových a neúrokových derivátů, již není trojice konstatních parametrů dostačující.

3.2.2 Ho-Lee model

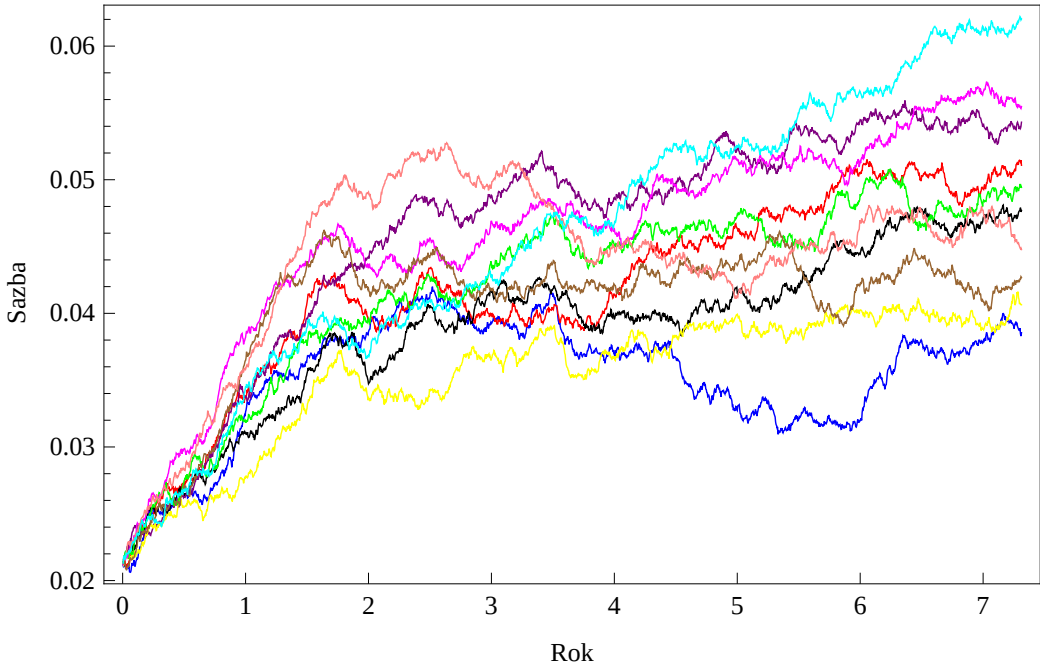
Model Ho-Lee je dalším z short-rate modelů, popsaný v kapitole 2.2.2. Okamžitou úrokovou míru jsme volili stejně jako u Vašíčkova modelu, průběh této sazby je znázorněn na obrázku 3.4.

Stejně jako u Vašíčkova modelu jsme zvolili parametr σ jako denní směrodatnou odchylku absolutních výnosů okamžité úrokové sazby. Narozdíl od Vašíčkova modelu, je vstupem Ho-Lee modelu počáteční výnosová křivka, v rámci kalibrace myslíme počáteční tržní výnosovou křivku (viz obrázek 3.3). To znamená, že modelová a tržní křivka jsou totožné (což může sloužit i jako kontrola při výpočtech). V Ho-Lee modelu budeme potřebovat forwardovou křivku okamžité úrokové sazby.



Obrázek 3.8: Forwardová křivka 3M sazby ke dni 19.6.2006

Ačkoliv model Ho-Lee nemá mean-reversion vlastnost, můžeme z průběhu 3M forwardové sazby říci, že bude spíš rostoucí.



Obrázek 3.9: 10 simulací 3M sazby Ho-Lee modelem

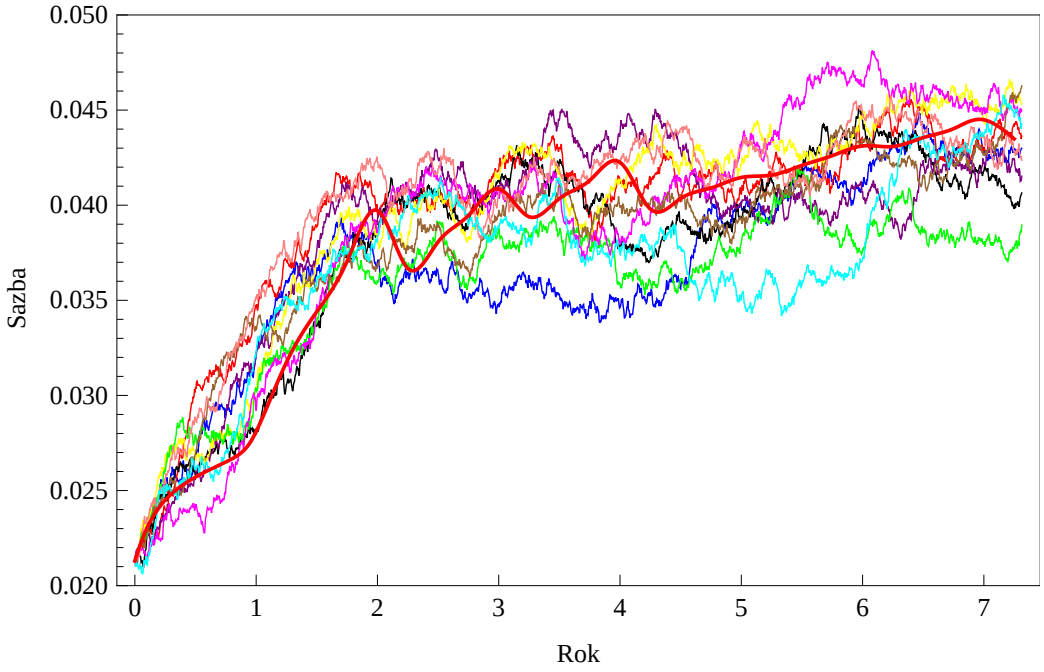
Jak jsme již poznamenali, tak model Ho-Lee nemá tzv. mean-reversion vlastnost, tj. sazba nemá návratovou hodnotu. Empiricky je však zjištěno, že úrokové sazby tuto vlastnost mají. Výhodou tohoto modelu je zahrnutí veškeré známé informace v podobě počáteční výnosové křivky, resp. forwardových sazeb. I když se jedná o model okamžité úrokové sazby, je tento model komplexnější než Vašíčkův a umožňuje přesnější ohodnocení složitějších úrokových derivátů.

3.2.3 Hull-White model

Hull-White model je poslední ze skupiny short-rate modelů, kterým jsme se podrobně zabývali v kapitole 2.2.3. Stejně jako v předchozích dvou modelech je okamžitou úrokovou sazbou 3M PRIBOR (vývoj této sazby viz obrázek 3.4). Hull-White model lze chápat jako rozšíření Vašíčkova modelu tak, že parametr b je funkcí času $b(t)$.

V kapitole 2.6.3 jsme popsali způsob kalibrace tohoto modelu. Vzhledem k tomu, že jsme veškeré výpočty zakládali na swapových sazbách a z nich dopočitatelných sazbách bezkupónových dluhopisů, volili jsme parametr a stejně jako u Vašíčkova modelu, tj. $a = 0,421311$. Předpokládáme tak, že rozšíření modelu nebude mít na parametr a významější vliv. V případě, že bychom výpočty zakládali i na jiných datech, použitelných pro kalibraci (např. implikované volatility), volili bychom kalibraci na nová data.

Tento model má, stejně jako Ho-Lee model, na vstupu počáteční výnosovou křivku. Takže počáteční tržní výnosová křivka opět odpovídá modelové výnosové křivce. U Hull-White modelu je forwardová křivka (viz obrázek 3.8) mnohem významější než u Ho-Lee modelu, protože představuje návratovou funkci (u Vašíčkova modelu návratová hodnota), což je dobře vidět na následujícím obrázku.



Obrázek 3.10: 10 simulací 3M sazby Hull-White modelem

Hull-White model v sobě obsahuje jak mean-reversion vlastnost, tak využití veškeré informace, která je na trhu k dispozici v podobě forwardových sazeb, které jsou onou návratovou funkcí. Při obezřetné volbě parametrů, resp. hodnot, na které se model kalibruje, by tento model měl dávat nejpřesnější výsledky ze všech uvedených short-rate modelů.

3.2.4 Libor market model

LIBOR Market model je jedním z tzv. *market modelů*, který jsme si popsali v kapitole 2.4. Vstupem modelu je počáteční tržní výnosová křivka, kde sazby s jednotlivými splatnostmi odpovídají sazbě LIBOR (v rámci příkladu PRIBOR). Časový krok je v našem případě roven jedenomu roku. To znamená, že sazby $L(1,0), L(2,0), \ldots, L(10,0)$ známe. Dalším vstupem modelu jsou forwardové volatility, jejichž výpočet jsme si ukázali v kapitole 2.4.2. Forwardové volatility jsme spočítali dle vzorce 2.4.8, kde spotové volatility jsou odhadnuty jako roční směrodatná odchylka logaritmických výnosů

sazeb bezkupónových dluhopisů. Následující tabulka shrnuje použité forwardové volatility

Λ_0	0,205122857
Λ_1	0,226016609
Λ_2	0,160732799
Λ_3	0,108400867
Λ_4	0,128351717
Λ_5	0,074002777
Λ_6	0,122205983
Λ_7	0,145946788
Λ_8	0,078074936
Λ_9	0,082997446
$\vdots$	$\vdots$

Tabulka 3.3: Vybrané forwardové volatility ke dni 19.6.2006

Výpočet sazeb pomocí LIBOR Market modelu probíhá iterativně, konkrétně tak, že se nejdříve dopočítá výnosová křivka za rok, která má o jednu splatnost méně než počáteční křivka, tj. $L(2,1), L(3,1), \ldots, L(9,1)$, další křivka za 2 roky má o dvě splatnosti méně, tj. $L(3,2), L(4,2), \ldots, L(8,2)$ atd.

3.3 Výsledky ocenění derivátu

Tato kapitola obsahuje výsledné ocenění derivátu specifikovaného v kapitole 3.1.1 (dále jen „derivátu“). Jsou zde porovnány jednotlivé metody, které jsou popsány v textu výše. Podrobněji se zaměříme na pravděpodobnostní rozdělení simulovaných sazeb, spreadů a současných hodnot derivátu. Výsledky samotného ocenění jsou potom znázorněny v souhrnné tabulce. Poslední část této kapitoly shrnuje použité metody a komentuje uzavřený obchod.

3.3.1 Porovnání použitých metod

Připomeňme, že jsme použili 4 metody ocenění derivátu: Vašíčkův model, Ho-Lee model, Hull-White model a LIBOR Market model (dále jen „LMM“). U všech metod jsme provedli 10 000 simulací veškerých plateb obou stran, které jsme diskontovali k 19.6.2006. Postupně si zde uvedeme sadu grafů znázorňujících pravděpodobnostní rozložení simulací sazby 12M PRIBOR,

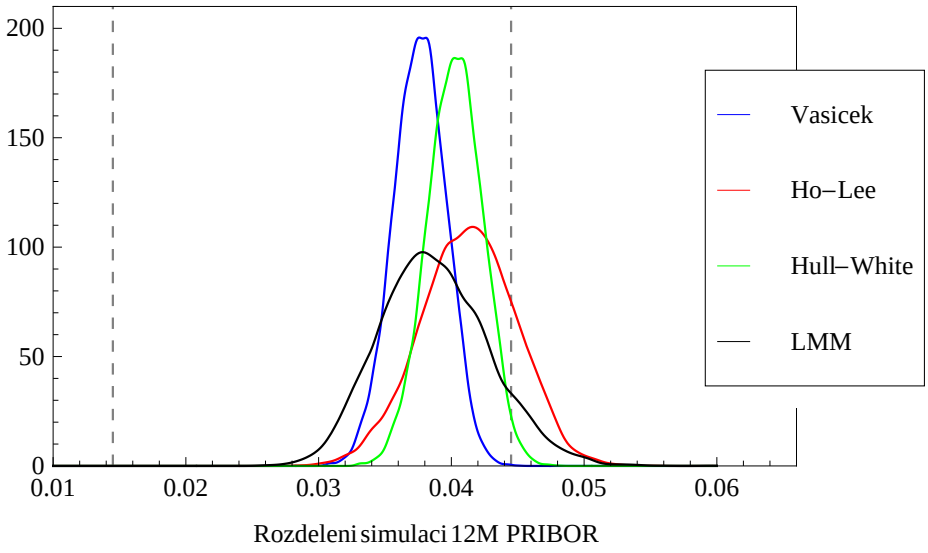
rozložení simulací spreadu jak je uveden v konfirmaci a rozložení simulovaných současných hodnot. Jako kontrola správnosti výpočtů nám posloužila shodnost Hull-White a Ho-Lee modelu s počáteční výnosovou křivkou (viz kapitoly 2.2.2 a 2.2.3) a fakt, že u bezarbitrážních modelů se diskontovaná budoucí hodnota jednoduchého derivátu (např. FRA) ve střední hodnotě rovná počáteční (dnešní) forwardové sazbě.

Následující grafy nám vizuálně potvrzují symetrii rozdělení (příp. i normalitu) simulovaných sazeb. U Vašíčkova a Hull-White modelu mají simulace menší rozptyl (to je patrné z „výšky“ a „šírky“ křivek). Ho-Lee model a LMM mají rozptyl vyšší než zmíněné dva modely, což plyne z faktu, že tyto modely nemají mean-reversion vlastnost, tj. neexistuje návratová hodnota, a proto se zvyšuje rozptyl.

Vzhledem k tomu, že Hull-White, Ho-Lee a LMM jsou bezarbitrážní modely, měly by střední hodnoty jejich rozdělení přibližně odpovídat počáteční roční forwardové sazbě. Z toho plyne, že střední hodnoty by si měly odpovídat, což nám potvrzují všechny obrázky simulovaných sazeb.

Vybrali jsme 3 výplatní dny za 2 roky, 5 a 7 let, tj. 19.3.2008, 19.3.2011 a 19.3.2013, na kterých si ukážeme rozdělení simulovaných sazeb a k nim náležícího spreadu. Připomeňme, že dolní hranice collaru je rovna 3%, 3,75% a 4% v uvedené výplatní dny. Tyto sazby společně s horní hranicí collaru 6% po odečtení fixní platby 1,55% jsou znázorněny na obrázcích 3.11, 3.12 a 3.13. Můžeme z obrázků vidět, že horní hranice collaru je postupem času uplatňována mnohem více než dolní hranice. Na obrázku 3.13 je patrné, že dolní hranice collaru je uplatňována hlavně u Ho-Lee modelu a LMM. U Vašíčkova a Hull-White modelu je viditelný vliv horní hranice collaru. Z toho plyne, že collar bude výhodnější pro investora než pro banku.

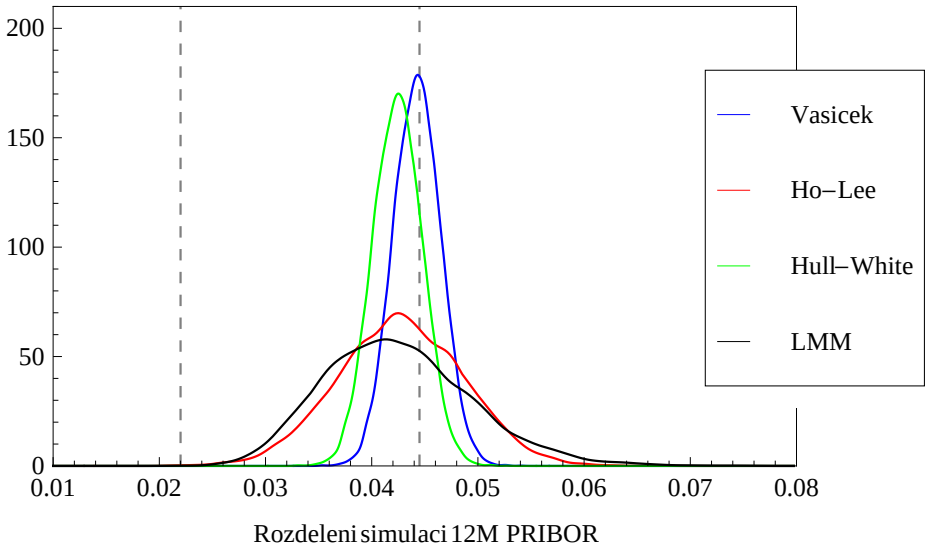
Jednotlivé obrázky nebudeme postupně komentovat, vysvětlíme si však hodnoty v tabulkách 3.4, 3.5 a 3.6. Již jsme si uvedli, že střední hodnoty simulovaných sazeb dle všech modelů by měly být přibližně stejné. Tento fakt nám zmíněné tabulky potvrzují. Směrodatné odchylky se chovají tak, jak jsme si uvedli výše, tj. u Vašíčkova a Hull-White modelu jsou směrodatné odchylky menší kvůli mean-reversion vlasnosti, u Ho-Lee a LMM se postupně směrodatné odchylky zvyšují. Na možnou symetrii rozdělení poukazuje kromě obrázků i rozdíl mezi střední hodnotou a mediánem, který ve všech případech není velký.



Obrázek 3.11: Empirické rozdělení simulací 12M PRIBOR k 19.3.2008

Charakteristiky		
Model	**Charakteristika**	**Hodnota**
Vašíček	Průměr	0,037613
	Směrodatná odchylka	0,001977
	Medián	0,037633
Hull-White	Průměr	0,0402707
	Směrodatná odchylka	0,002076
	Medián	0,040291
Ho-Lee	Průměr	0,041262
	Směrodatná odchylka	0,003573
	Medián	0,041316
LMM	Průměr	0.038728
	Směrodatná odchylka	0,004091
	Medián	0,038517

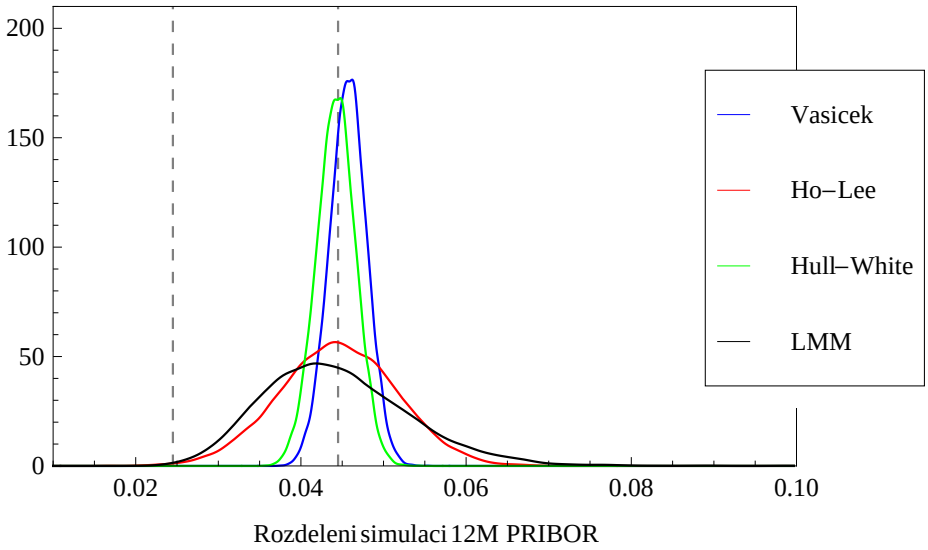
Tabulka 3.4: Charakteristiky empirického rozdělení z obrázku 3.11



Obrázek 3.12: Empirické rozdělení simulací 12M PRIBOR k 19.3.2011

Charakteristiky		
Model	**Charakteristika**	**Hodnota**
Vašíček	Průměr	0,044260
	Směrodatná odchylka	0,002210
	Medián	0,044264
Hull-White	Průměr	0,042434
	Směrodatná odchylka	0,002321
	Medián	0,042438
Ho-Lee	Průměr	0,042693
	Směrodatná odchylka	0,005886
	Medián	0,042680
LMM	Průměr	0,042457
	Směrodatná odchylka	0,006946
	Medián	0,041948

Tabulka 3.5: Charakteristiky empirického rozdělení z obrázku 3.12



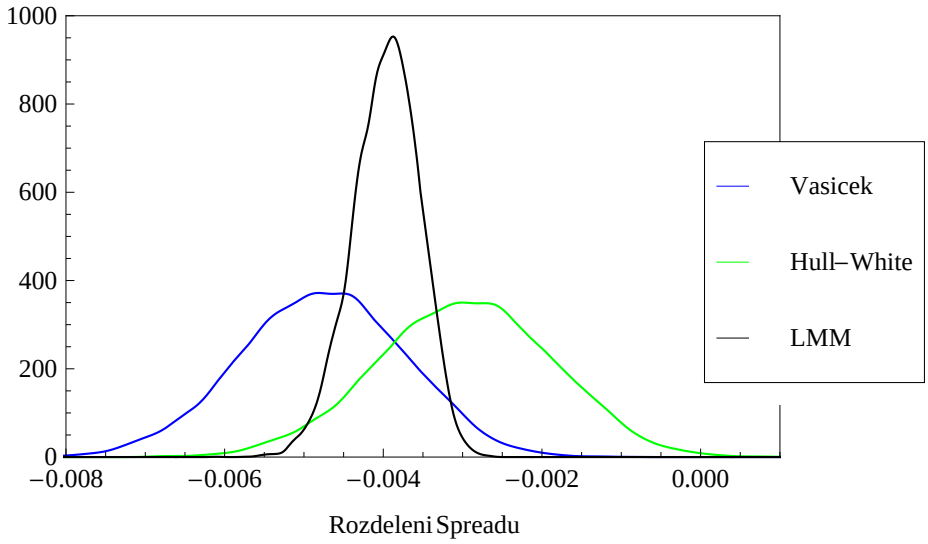
Obrázek 3.13: Empirické rozdělení simulací 12M PRIBOR k 19.3.2013

Charakteristiky		
Model	**Charakteristika**	**Hodnota**
Vašíček	Průměr	0.045698
	Směrodatná odchylka	0.002243
	Medián	0.045712
Hull-White	Průměr	0,044250
	Směrodatná odchylka	0,002355
	Medián	0,044265
Ho-Lee	Průměr	0,044488
	Směrodatná odchylka	0,007052
	Medián	0,044479
LMM	Průměr	0,044319
	Směrodatná odchylka	0,008765
	Medián	0,043541

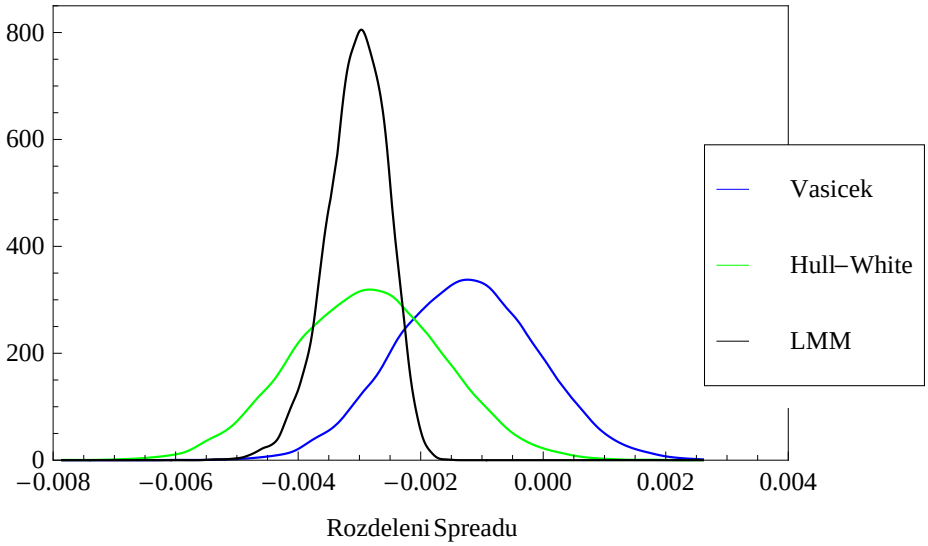
Tabulka 3.6: Charakteristiky empirického rozdělení z obrázku 3.13

Pro úplnost uvedeme i rozložení simulovaných spreadů dle jednotlivých modelů. Rozdělení spreadu dle Vašíčkova modelu, Hul-White modelu a LMM jsou znázorněna na obrázcích 3.14, 3.15 a 3.16. Vzhledem k malému rozptylu spreadu v Ho-Lee modelu jsou spready k jednotlivým výplatním datům znázorněny v samostatném obrázku 3.17. Zde také nebudeme komentovat obrázky jednotlivě a ani si nebudeme uvádět tabulky s charakteristikami rozdělení. Uveďme však, že rozdělení se postupem času posouvají směrem

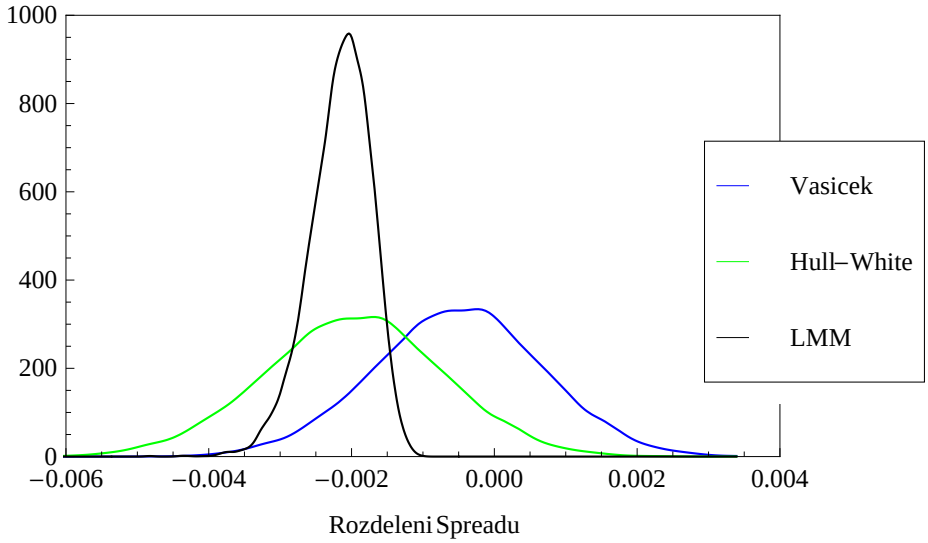
k nule, to můžeme vidět např. na zvětšující se střední hodnotě. Nejlépe je tento posun vidět na obrázku 3.17. To znamená, že sazba hrazená bankou se postupně zdola blíží fixní sazbě 5,55%. U Vašíčkova a Hull-White modelu může tato sazba být dokonce vyšší, jak je patrné z obrázků 3.15 a 3.16. Posun k nule, resp. nad nulu, je způsoben přibližováním 2Y a 10Y swapové sazby a změnou tvaru výnosové křivky, křivka je plošší, resp. nerostoucí.



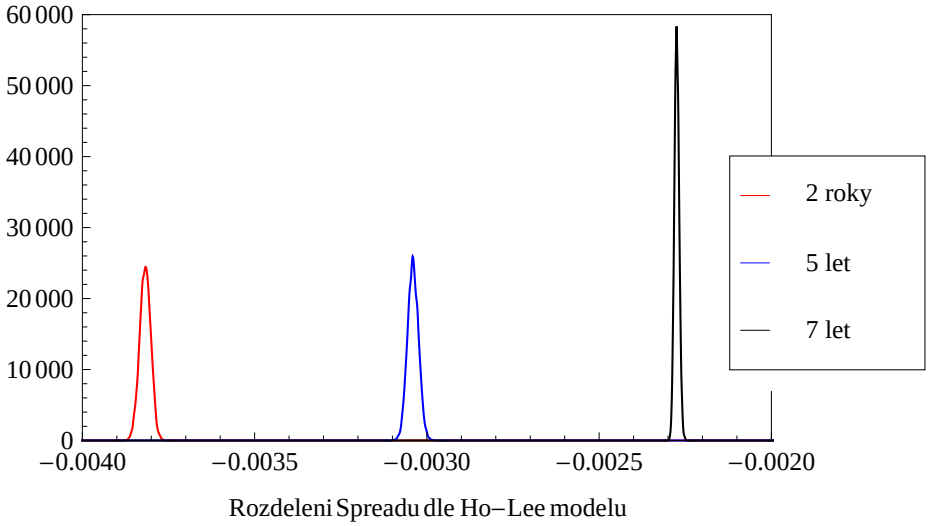
Obrázek 3.14: Empirické rozdělení Spreadu k 19.3.2008



Obrázek 3.15: Empirické rozdělení Spreadu k 19.3.2011



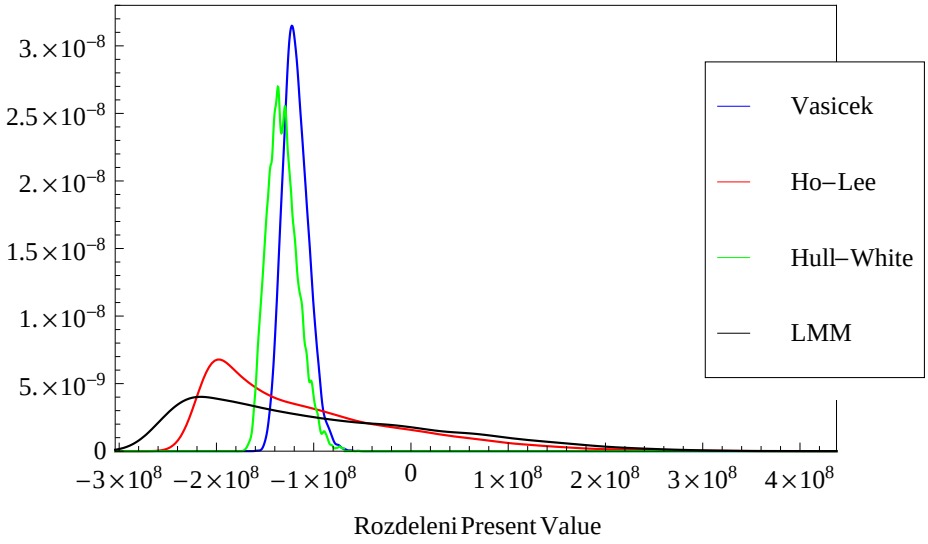
Obrázek 3.16: Empirické rozdělení Spreadu k 19.3.2013



Obrázek 3.17: Empirické rozdělení Spreadu dle Ho-Lee modelu ke dnům splatnosti po 2 rocích, 5 a 7 letech

Pomocí simulovaných sazeb a spreadů již můžeme ocenit derivát. Nejdříve se podíváme na rozdělení Present Value derivátu (dále jen „PV“), které je znázorněno na obrázku 3.18. Z obrázku se nám opět potvrzuje velký rozptyl Ho-Lee modelu a LMM a menší rozptyl Vašíčkova a Hull-White modelu. Očekávali bychom, že rozdělení budou symetrická, jako tomu bylo u rozdělení ostatních pohyblivých plateb. Vašíčkův a Hull-White model opravdu symetrické jsou. U Ho-Lee modelu a LMM se viditelně projevil collar hlavně

„uříznutím“ levé části rozdělení, což jsme mohli usoudit z obrázků 3.12 a 3.13, tj. investor má zdola omezenou ztrátu collarem. V přiložené tabulce jsou charakteristiky rozdělení včetně kvantilů, které mohou být společně se směrodatnou odchylkou další mírou rizika.

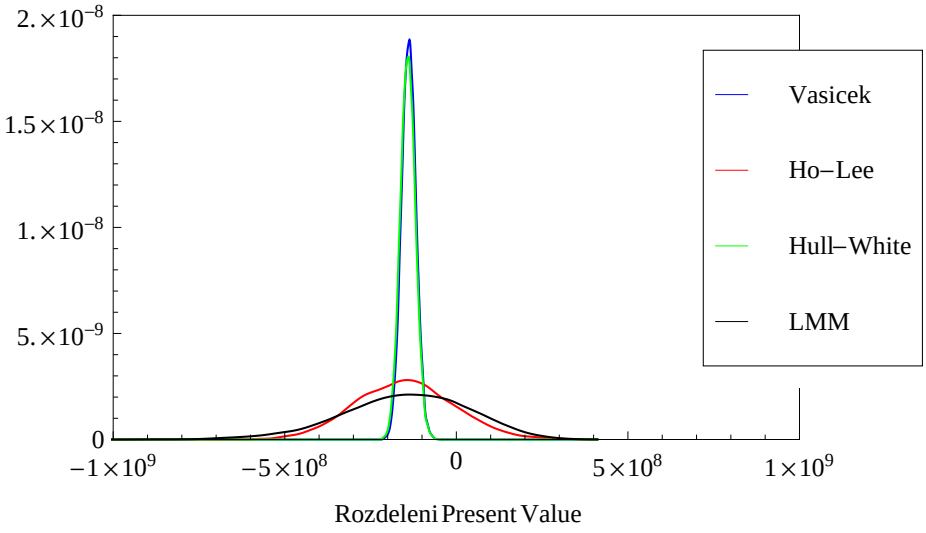


Obrázek 3.18: Empirické rozložení simulací PV

Charakteristiky		
Model	**Charakteristika**	**Hodnota**
Vašíček	Průměr	-118 519 210
	Směrodatná odchylka	13 097 066
	Medián	-119 580 346
	5% kvantil	-138 428 464
	95% kvantil	-95 605 785
Hull-White	Průměr	-131 769 997
	Směrodatná odchylka	18 557 500
	Medián	-133 236 128
	5% kvantil	-155 342 482
	95% kvantil	-103 694 512
Ho-Lee	Průměr	-108 611 960
	Směrodatná odchylka	99 492 002
	Medián	-136 915 817
	5% kvantil	-213 956 233
	95% kvantil	89 104 018
LMM	Průměr	-98 312 796
	Směrodatná odchylka	124 132 946
	Medián	-126 478 179
	5% kvantil	-250 004 915
	95% kvantil	138 613 962

Tabulka 3.7: Charakteristiky empirického rozdělení PV derivátu

Nyní předpokládejme, že obchod by byl uzavřen bez collaru. Již jsme řekli, že collar nám viditelně „uřízne“ rozdělení PV simulovaných dle Ho-Lee modelu a LMM. Na obrázku 3.19 je zřejmá symetrie všech rozdělení a daleko více je zde patrný rozptyl Ho-Lee modelu a LMM, jejichž rozdělení si přibližně odpovídají. Podobně je to u Vašíčkova a Hull-White modelu, to opět plyne ze stejného nastavení parametru a. Rozdílem výsledných ocenění derivátu s collarem a bez něj dostaneme cenu collaru (viz tabulka 3.10).



Obrázek 3.19: Empirické rozložení simulací PV bez zahrnutí opce

Charakteristiky		
Model	**Charakteristika**	**Hodnota**
Vašíček	Průměr	-138 317 754
	Směrodatná odchylka	20 967 374
	Medián	-138 399 409
	5% kvantil	-172 463 058
	95% kvantil	-103 358 705
Hull-White	Průměr	-141 112 481
	Směrodatná odchylka	21 819 796
	Medián	-141 163 954
	5% kvantil	-176 641 327
	95% kvantil	-104 825 888
Ho-Lee	Průměr	-149 803 741
	Směrodatná odchylka	143 813 819
	Medián	-150 789 544
	5% kvantil	-381 651 122
	95% kvantil	89 104 901
LMM	Průměr	-147 218 587
	Směrodatná odchylka	184 684 868
	Medián	-139 453 108
	5% kvantil	-466 765 017
	95% kvantil	138 613 962

Tabulka 3.8: Charakteristiky empirického rozdělení PV derivátu bez zahrnutí collaru

V následující tabulce jsou uvedeny výsledky ocenění derivátu v CZK pomocí všech zde uvedených metod (jedná se o průměry, které jsou uvedené v tabulce 3.7). Připomeňme, že investor platí 1,55% + collar s klouzavou dolní sazbou a fixní horní sazbou a banka platí 5,55%-spread, kde spread je roven 10YIRS - 2YIRS. PV je v tabulce uvedena z pozice investora, tj. v případě záporné PV je výhoda na straně banky, v případě kladné PV je výhoda na straně investora. PV je nulová u swapu uzavřeného za tržních podmínek.

Metoda	PV ke dni 19.6.2006	% z nominální částky
Vašíčkův model	-118 519 210 CZK	2,20%
Hull-White model	-131 769 997 CZK	2,45%
Ho-Lee model	-108 611 960 CZK	2,02%
LMM	-98 312 796 CZK	1,82%

Tabulka 3.9: Ocenění derivátu ke dni 19.6.2006 v CZK dle použitých metod

Poznamenejme, že hodnoty v tabulce 3.9 jsou diskontované průměry z výše zmíněných 10 000 simulací. Průměr nám sice pomohl ocenit daný derivát, ale nenese v sobě žádnou dodatečnou informaci o rozložení simulací. Proto jsme se na začátku této kapitoly podrobně zabývali rozložením jednotlivých pohyblivých plateb, které byly k ocenění zapotřebí. Vašíčkův a Hull-White model jsou si, dle očekávání, blízké a celkem stabilní metody. Ho-Lee model a LMM jsou vzhledem k velkému rozptylu a menšímu počtu simulací nestabilní (rychlost konvergence $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, kde σ je směrodatná odchylka a n je počet simulací).

Porovnání PV derivátu s collarem a bez collaru je uvedeno v tabulce níže. Zde je PV derivátu bez zahrnutí collaru a rozdíl PV s collarem a bez něj. Tento rozdíl nám vlastně oceňuje collar. Jelikož dané částky vztahujeme k investorovi, znamená to, že opce je ve všech případech pro investora výhodná. Z obrázků simulovaných sazeb jsme viděli, že se častěji uplatňovala horní hranice collaru, z toho plyne, že cena derivátu bez collaru je nižší než s ním.

Metoda	PV ke dni 19.6.2006	Rozdíl PV s a bez collaru
Vašíčkův model	-138 317 754 CZK	19 798 554 CZK
Hull-White model	-141 112 481 CZK	9 342 484 CZK
Ho-Lee model	-149 803 741 CZK	41 191 781 CZK
LMM	-147 218 587 CZK	48 905 791 CZK

Tabulka 3.10: Ocenění derivátu bez collaru ke dni 19.6.2006 v CZK dle použitých metod

3.3.2 Navrhované doporučení

Ocenili jsme derivát 4 různými metodami. Výsledkem porovnání těchto metod je stabilita a podobné rozdělení Vašíčkova a Hull-White modelu, a nestabilita a podobné rozdělení Ho-Lee modelu a LMM. Pokud se podíváme na výsledná ocenění derivátu pozorujeme rozdíl mezi jednotlivými modely.

Tím vzniká pro investora docela významné *modelové riziko*, tj. riziko výběru modelu. Významné je proto, že o tomto riziku investor implicitně neuvažuje.

Doporučujeme pro ocenění volit Hull-White model vzhledem k jeho stabilitě (malému rozptylu), mean-reversion vlastnosti a k bezarbitrážnosti modelu zajištěné počátečními forwardovými sazbami, které model využívá. V praxi to znamená, že v účetních knihách by byla vedena částka vypočítaná Hull-White modelem.

Na základě výsledků z minulé kapitoly a faktu, že obchod už několik let probíhá, můžeme říci, že vstup do tohoto obchodu byl pro investora nevýhodný. Přesto, že daný obchod je nestandardní, je tato ztráta pro investora dost vysoká. Aby byl úrokový swap uzavřen za tržních podmínek, je zapotřebí změnit nastavení parametrů transakce. Jelikož je nevýhoda na straně investora, doporučili bychom změnu nastavení parametrů obchodu na jeho straně. Pokud by bylo vyžadováno zachování pohyblivé sazby je možné snížit fixní sazbu 1,55% na přibližně 1,15%, v opačném případě bychom mohli obchod zjednodušit fixní platbou tak, aby v obou případech byla tržní hodnota derivátu nulová.

Předpokládejme, že investor chce teprve do této transakce vstoupit. Vzhledem ke skutečnosti, že se investor chtěl tímto derivátem zajistit proti změně úrokových sazeb, doporučovali bychom porovnání očekávané ztráty v případě růstu/poklesu sazeb a PV derivátu, zda se investorovi obchod vyplatí. Obecně bychom investorovi vstup do transakce za podmínek popsaných v konfirmaci nedoporučovali.

Kapitola 4

Závěr

Cílem této práce bylo popsat a porovnat mezi sebou jednotlivé modely úrokových sazeb. V teoretické části jsme si zadefinovali pojmy potřebné k uvedení stochastických modelů úrokových sazeb. Podrobně jsme rozebrali modely okamžité úrokové sazby a HJM rámec prostřednictvím LIBOR Market modelu, který se nefixuje na vývoj okamžité úrokové sazby, ale uvažuje dynamiku forwardových sazeb. Zaměřili jsme se na tři modely okamžité úrokové sazby - Vašíčkův, Hull-White a Ho-Lee model. Ukázali jsme ocenění úrokových opcí na základě těchto modelů a vybrané metody kalibrace na reálná data.

Doplňkem teoretické části bylo ocenění skutečně obchodovaného úrokového derivátu, na kterém jsme si ukázali platnost teoretických odvození. Při řešení příkladu jsme kalibrovali modely na dostupná data popsaná a analyzovaná v kapitole 3.1. Důležitost této kalibrace jsme zdůraznili v kapitole 2.6. Nastavení parametrů modelů je klíčové pro vývoj modelové úrokové sazby a tedy i výsledné ocenění derivátu. Více o různých metodách kalibrace pro další, zde nezmíněné, modely lze najít v [23].

Z výsledků ocenění úrokového derivátu plyne, že v dlouhodobém horizontu je velký rozdíl mezi modely s mean-reversion vlastností a modely, které tuto vlastnost nemají. Tento rozdíl se projeví hlavně na rozptylu Vašíčkova a Hull-White modelu, který je oproti Ho-Lee a LIBOR Market modelu výrazně menší. Proto se i ocenění opce pro tyto dvojice modelů výrazně liší, což je patrné na rozdělení PV (viz kapitola 3.3).

Dále jsme zjistili, že vzniká dodatečné modelové riziko, které může být, a v našem případě je, významné. V kapitole 3.3.2 jsme navrhli použít ocenění derivátu pomocí Hull-White modelu, protože je stabilní, obsahuje mean-reversion vlastnost, o které empiricky víme, že pro úrokové sazby platí, a protože využívá veškerou dostupnou informaci na trhu. Zároveň je ocenění tímto modelem oceněním konzervativním, tj. nejvyšším ze všech použitých metod. V závěru této kapitoly jsme konstatovali, že obchod je pro jednu stranu nevýhodný, a proto bychom doporučili změnu nastavení fixního pa-

rametru na straně investora z 1,55% přibližně na 1,15%, aby byl obchod uzavřen za tržních podmínek. Vzhledem k tomu, že obchod již několik let probíhá, slouží ocenění pouze ke studijním účelům.

Závěrem poznamenejme, že ačkoliv se stochastický vývoj úrokových sazeb řadí do kategorie prozkoumaných odvětví, vzniká prostor pro zobecnění existujících modelů pomocí náhodných parametrů a na ně navazující hierarchické modely, které už jdou nad rámec této práce.

Literatura

[1] Anděl J.: *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, Praha, 2005

[2] Baxter M., Rennie A.: *Financial Calculus*, University Press, Cambridge, 1996.

[3] Brace A., Gatarek D., Musiela M.: *The Market Model of Interest Rate Dynamics*, Mathematical Finance, **7**, 2, 127-147, 1997.

[4] Brigo D., Mercurio F.: *Interest Rate Model - Theory and Practice*, Springer Finance, Berlin, 2006.

[5] Cipra T.: *Matematika cenných papírů*, HZ Praha, Praha, 2000.

[6] Duffie D., Kan R.: A Yield Factor Model of Interest Rates, Mathematical Finance, **6**, 4, 379-406, 1996.

[7] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publisher, 2002.

[8] Ho T. S. Y., Lee S.B.: *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*, Journal of Finance 41, 1986.

[9] Hull J. C., White A.: *Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model*, NYU Working Paper No. FIN-00-023, 2000.

[10] Hull J. C.: *Options, Futures, and Other Derivatives, 5th Edition*, Pearson Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2003.

[11] Hull J. C.: *Options, Futures, and Other Derivatives, 7th Edition*, Pearson Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2008.

[12] Hull J. C., White A.: *Pricing Interest-Rate Derivative Securities*, The Review of Financial Studies, **3**, 4, 573-592, 1990.

[13] International Swaps and Derivatives Association: *2000 ISDA Definitions*, http://isda.org.

[14] International Swaps and Derivatives Association: *Annex to the 2000 ISDA Definitions*, Version June 2000, http://isda.org.

[15] Jamshidian F.: *An Exact Bond Option Formula*, Journal of Finance 44, 205-209, 1989.

[16] Janeček K.: *Stochastic Calculus in Finance*, Studijní text k přednášce Stochastická analýza ve finanční matematice, MFF UK, 2009.

[17] Jílek J.: *Finanční a komoditní deriváty v praxi*, Grada Publishing, Praha, 2010.

[18] Karatzas I., Shreve S.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York, 2000.

[19] Lachout P.: *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, Praha, 2004.

[20] Málek J.: *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*, EKOPRESS, Praha, 2005.

[21] Mandl P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*, Academia, Praha, 1985.

[22] Prášková Z.: *Základy náhodných procesů II*, Karolinum,Praha, 2007.

[23] Simone A.: *Pricing Interest Rate Derivatives under Different Interest Rate Modeling: Critical and Empirical Comparison*, Investment Management and Financial Innovations, **7**, 2, 40-49, 2010.

[24] Steele M.: *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, Berlin ,2001.

[25] Shreve S.: *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, Berlin, 2004.

[26] Vojtek M.: *Calibration of Interest Rate Models - Transition Market*, CERGE-EI Working Paper, Prague, 2004

[27] Wilmott P.: *Paul Wilmott On Quantitative Finance, 2nd Edition*, John Wiley, Chichester, 2008.