**Ražebné ve spojitém čase**

**Petr Mach**, Vysoká škola ekonomická
**Tomáš Hanzák**, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

## 1. Úvod

Jedním ze způsobů získání veřejného příjmu je emise nově vytištěných peněz. Protože emisí peněz nedochází k tvorbě bohatství, je hodnota statků, které stát takto získá, na úkor veřejnosti, která čelí poklesu kupní síly peněz. Hodnota statků získaná státem emisí peněz se nazývá *ražebné* (někdy se též mluví o *inflační dani*). Rozlišujeme absolutní ražebné vyjádřené ve stálých peněžních jednotkách a relativní ražebné vyjádřené jako podíl emisí peněz získaných statků na hrubém domácím produktu (HDP).

Absolutní ražebné za dané období se většinou vyjadřuje jako součin reálné měnové báze a míry inflace[1], resp. jako součin reálné měnové báze a relativního poklesu kupní síly peněz.[2] Tato vyjádření pracují se zjednodušujícím předpokladem *diskrétního času* a neberou v úvahu, že existuje vliv zvyšování množství oběživa na hodnotu emitovaných peněz, resp. že tento vliv je průběžný. Jiní autoři odvozují vztah pro okamžité ražebné (nazývané ražebné ve *spojitém čase*)[3], jako ražebné v diskrétním čase vyjádřené za nekonečně krátké období.

V tomto článku jednak přinášíme výpočet relativního ražebného v diskrétním čase pomocí modelu, který nazveme *model aukce*, a jednak s využitím tohoto modelu aukce vyjádříme ražebné za dané období za předpokladu v čase spojitých změn v měnové bázi a cenové hladině. Takové vyjádření podle našeho názoru lépe odpovídá povaze ekonomických procesů, než obvykle používaná vyjádření ražebného.

## 2. Ražebné v diskrétním čase

Pro odvození velikosti relativního ražebného v diskrétním čase použijeme model jednorázové aukce HDP vyprodukovaného v daném období[4]. Předpokládejme, že HDP za dané období se prodává na aukci, kam stát přichází utratit nově emitované peníze a veřejnost přichází utratit nějaké množství svých peněz již dříve emitovaných. Ražebné za dané období, tedy podíl statků, které stát získá na takovéto aukci, odpovídá podílu útrat státu na celkových útratách na aukci.[5]

Označme $M_R$ původní úroveň měnové báze a $\mu$ její relativní přírůstek za dané období (způsobený emisí nových peněz). To znamená, že stát na aukci přichází s $\mu \cdot M_R$ peněžními

[1] Např. Cagan (1956), str. 78; Bailey (1956), str. 102; Marty (1967), str. 72; Friedman (1971); str. 849, Barro (1972); str. 983.
[2] Např. Keynes (1924), str. 42-43; Haslag (1998), str. 11, Walsh (2001), str. 135
[3] Např. Cagan (1956), str. 78; Auernheimer (1974), str. 600
[4] Pro zjednodušení abstrahujeme od faktu, že na trhu se obchoduje nejen s nově vyprodukovanými statky finální spotřeby, které tvoří HDP, ale rovněž se zbožím z druhé ruky a s reálnými a finančními aktivy.
[5] Předpokládáme, že celý HDP je nakupován za dané peníze. Abstrahujeme tedy od tzv. Lafferova efektu, kdy při vyšších mírách růstu měnové báze dochází k příklonu veřejnosti k placení cizí měnou nebo k naturální směně a v důsledku takto se zmenšující poptávky po penězích se snižuje i reálný výnos státu z ražebného i při zvyšujícím se tempu růstu měnové báze.

jednotkami. Předpokládejme pro jednoduchost nejprve, že rychlost obratu peněz (za dané období) a peněžní multiplikátor se rovnají jedné. Pak množství peněz utracených na aukci veřejností bude rovno $M_R$. (Tento předpoklad opustíme v následujícím odstavci). Celkové peněžní útraty na aukci (součet útrat státu a veřejnosti) jsou $M_R + \mu \cdot M_R$ a ražebné (značíme *s*) za dané období je tedy rovno

$$s = \frac{\mu \cdot M_R}{M_R + \mu \cdot M_R} = \frac{\mu}{1+\mu} . \tag{1}$$

Opustíme-li předpoklad, že peněžní multiplikátor *m* a rychlost obratu peněz *V* se rovnají jedné, pak veřejnost přichází na trh s celkovým množstvím peněz $m \cdot V \cdot M_R$ a ražebné lze za dané období analogicky vyjádřit jako

$$s = \frac{\mu \cdot M_R}{m \cdot V \cdot M_R + \mu \cdot M_R} = \frac{\mu}{m \cdot V + \mu} . \tag{2}$$

Např. aby stát získal ražebné ve výši 2 % HDP, musel by za předpokladu podílu měnové báze na HDP[6] ve výši 5 % činit přírůstek měnové báze 40 %.

## 3. Ražebné ve spojitém čase

Protože ekonomický vývoj není sledem diskrétních okamžiků, mezi nimiž se skokově mění hodnota veličin jako peněžní zásoba nebo cenová hladina, ale spíš v čase spojitým procesem, budeme předpokládat, že stát i veřejnost utrácejí peníze „spojitě“.

Budeme uvažovat období délky jednoho roku, které si rozdělíme na *n* stejně dlouhých period. V každé z period určíme ražebné podle vzorce (1), resp. (2) a ražebné za celé období potom vypočteme jako vážený aritmetický průměr ražebných za jednotlivé periody, kde vahou každé periody bude množství statků během ní vyprodukovaných. Nakonec provedeme limitní přechod $n \to \infty$, čímž obdržíme vztah pro ražebné ve spojitém čase.

Předpokládejme opět nejprve, že peněžní multiplikátor a (okamžitá) rychlost obratu peněz se rovnají jedné. Dejme tomu, že stát za dané období zvětší emisí nových peněz měnovou bázi na $1+\mu$ násobek původní hodnoty ($\mu > 0$), a to tak, že poměrný nárůst měnové báze za stejně dlouhá časová období bude stejný. Velikost měnové báze v čase *t* bude tedy vyjádřená vztahem $M_R(t) = \widetilde{M}_R (1+\mu)^t$, $t \in [0,1]$, kde $\widetilde{M}_R$ je počáteční velikost měnové báze.

Ražebné v *k*-té periodě ($k = 1, \ldots, n$) je podle vzorce (1) rovno

---

[6] Podíl měnové báze na HDP se rovná $\frac{1}{m \cdot V}$

$$s_k^{(n)} = \frac{\widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k}{n}} - \widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k-1}{n}}}{\frac{1}{n} \cdot \widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k-1}{n}} + \widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k}{n}} - \widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k-1}{n}}} = \frac{(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} + (1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1}. \qquad (3)$$

(Výraz $(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1$ v rovnici (3) je relativní přírůstek měnové báze v jednotlivé periodě takový, že celkový přírůstek za celé období činí $\mu$.) Jak vyplývá z výše uvedené úpravy vzorce (3), ražebné je stejné ve všech periodách. A protože vážený aritmetický průměr $n$ stejných čísel – s libovolnými vahami – je roven tomuto číslu, bude i ražebné $s^{(n)}$ za celé období rovno výrazu (3).

Nyní zbývá učinit poslední krok, a to zjemňovat dělení uvažovaného období na stále větší počet period. Ražebné ve spojitém čase $s$ pak získáme provedením limitního přechodu $n \to \infty$. Tedy

$$s = \lim_{n\to\infty} s^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} + (1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \left[(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1\right]}{1 + n \cdot \left[(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1\right]}.$$

Lze snadno dokázat[7], že $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left[(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1\right] = \ln(1+\mu)$, a tudíž ražebné ve spojitém čase za dané období lze za předpokladu jednotkové rychlosti obratu peněz a jednotkového peněžního multiplikátoru vyjádřit jako

$$s = \frac{\ln(1+\mu)}{1 + \ln(1+\mu)}. \qquad (4)$$

Opustíme-li předpoklad, že peněžní multiplikátor $m$ a rychlost obratu peněz $V$ se rovnají jedné, bude ražebné v $k$-té periodě podle vzorce (2), jakož i ražebné $s^{(n)}$ za celé období rovno

$$s_k^{(n)} = \frac{\widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k}{n}} - \widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k-1}{n}}}{m \cdot \frac{V}{n} \cdot \widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k-1}{n}} + \widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k}{n}} - \widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)^{\frac{k-1}{n}}} = \frac{(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1}{m \cdot \frac{V}{n} + (1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Ražebné ve spojitém čase $s$ pak bude rovno

$$s = \lim_{n\to\infty} s^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1}{m \cdot \frac{V}{n} + (1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \left[(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1\right]}{m \cdot V + n \cdot \left[(1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1\right]},$$

což se rovná

[7] $\lim_{n\to\infty} n\left((1+\mu)^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{x\to 0_+} \frac{(1+\mu)^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{x\ln(1+\mu)} - 1}{x} = \lim_{y\to 0_+} \frac{e^y - 1}{y} \ln(1+\mu) = \ln(1+\mu).$

$$s = \frac{\ln(1+\mu)}{m \cdot V + \ln(1+\mu)}. \tag{5}$$

Vzorec (5) tak představuje nejobecnější vyjádření ražebného za dané období za předpokladu spojité emise peněz a spojitého vlivu této emise na hodnotu peněžních jednotek.

Toto ražebné (funkce $s$ proměnné $\mu$) má v bodě 0 hodnotu 0 (nulový nárůst množství peněz = nulové ražebné) a derivaci $\frac{1}{m \cdot V}$ (pro malé hodnoty $\mu$ je $s \approx \frac{\mu}{m \cdot V}$). Je rostoucí (větší nárůst množství peněz = větší ražebné) a limita pro $\mu \to \infty$ je 1 (dostatečně rychlým emitováním peněz lze získat ražebným libovolně velký díl HDP). Platí, že čím větší je rychlost obratu peněz $V$ a čím vyšší je peněžní multiplikátor $m$, tím menší je ražebné.

Pro dané $\mu$ a pro daný podíl měnové báze na HDP má ražebné ve spojitém čase (4), resp. (5) nižší hodnotu než ražebné v diskrétním čase (1), resp. (2). Aby stát získal ražebné ve výši 2 % HDP, musel by v tomto případě za předpokladu podílu měnové báze na HDP ve výši 5 % činit přírůstek měnové báze 50 %.

## 4. Maximalizace ražebného

K navyšování měnové báze nemusí pochopitelně docházet pouze stálým tempem (to jest podle vztahu $M_R(t) = \widetilde{M}_R(1+\mu)^t$). Ukážeme nicméně, že právě stálé tempo emise peněz je – v případě stálosti produkce – způsob emise, který maximalizuje ražebné.

Logika naší úvahy je následující. Utratí-li např. stát novou emisi peněz určenou na celý rok najednou v jeden den, může získat sice téměř veškerý produkt, který je na trhu pro ten den k dispozici, nezíská ale nic ve zbytku období. Situace státu je v tomto analogická situaci lovce, který, narazí-li každý den na stejný objem zvěře, nemaximalizuje roční úlovek tím, že si vystřílí celý zásobník nábojů první den.

Předpokládejme, že stát chce zvýšit za dané období měnovou bázi na $1+\mu$ násobek původní hodnoty ($\mu$ je pevně dané). Nechť velikost měnové báze v čase $t$, $t \in [0,1]$ je vyjádřena neklesající funkcí $M_R(t)$ splňující okrajové podmínky $M_R(0) = \widetilde{M}_R$ a $M_R(1) = \widetilde{M}_R \cdot (1+\mu)$.

Období opět rozdělíme na $n$ stejně dlouhých period a vyjádříme podle vzorce (2) ražebné $s_k^{(n)}$ v $k$-té v periodě. Platí

$$s_k^{(n)} = \frac{M_R\left(\frac{k}{n}\right) - M_R\left(\frac{k-1}{n}\right)}{m \cdot \frac{V}{n} \cdot M_R\left(\frac{k-1}{n}\right) + M_R\left(\frac{k}{n}\right) - M_R\left(\frac{k-1}{n}\right)}.$$

Ražebné $s^{(n)}$ za celé období opět vypočteme jako vážený aritmetický průměr ražebných za jednotlivé periody, kde váhou bude produkce za danou periodu. Protože nyní je podle předpokladu produkce ve všech periodách stejná, bude $s^{(n)}$ obyčejným aritmetickým průměrem ražebných za jednotlivé periody. Tedy platí

$$s^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} s_k^{(n)} .$$

Tento výraz upravíme na součet hodnot pomocné konkávní funkce[8]. Pro konkávní funkci totiž platí, že součet funkčních hodnot čísel dávajících daný součet je největší, jsou-li tato čísla stejná[9].

Z toho plyne, že ražebné $s^{(n)}$ je maximální právě pro funkci $M_R(t) = \widetilde{M}_R(1+\mu)^t$. Jelikož ražebné $s$ je limitou posloupnosti $\left(s^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, je také $s$ maximální v případě $M_R(t) = \widetilde{M}_R(1+\mu)^t$ a toto maximální ražebné je vyjádřeno vzorcem (5).

**5. Závěr**

Model aukce, kde ražebné představuje podíl státem utráceného přírůstku měnové báze na celkových útratách, představuje srozumitelné vyjádření ražebného v diskrétním čase. Tento model je kompatibilní s přístupem řady ekonomů od Keynese (1924) po Walshe (2001).

Mají-li ekonomické procesy povahu spíše v čase spojitého vývoje než diskrétních změn, je vzorec pro ražebné vycházející ze spojitého vývoje (vzorec (5)) vhodnějším vodítkem pro hospodářskou politiku než vzorec pro ražebné vycházející z diskrétního vývoje. Chce-li stát např. získat ražebným 2 % HDP, pak by měl roční přírůstek měnové báze činit spíše 50 %, jak vyplývá ze vzorce pro spojité ražebné (5), a nikoliv 40 %, jak by vyplývalo ze vzorce pro diskrétní ražebné (2).

Navíc, aby stát skutečně získal takovéto ražebné, měl by nově vytištěné peníze utrácet během roku plynule.

---

[8] Výraz $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} s_k^{(n)}$ upravíme na $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$, kde $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{m \cdot \frac{V}{n} + e^x - 1}$ je pro $n > \frac{m \cdot V}{2}$ konkávní funkce a $x_k = \ln\left( M_R\left(\frac{k}{n}\right) \Big/ M_R\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$. Vzhledem k tomu, že spojité ražebné je limitou $s^{(n)}$ pro $n \to \infty$, tak se stejně můžeme omezit na $n$ větší než $\frac{m \cdot V}{2}$.

[9] Za podmínky $\sum_{k=1}^{n} x_k = \ln(1+\mu)$ nabývá součet $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ maxima v případě $x_1 = \ldots = x_n$, což funkce $M_R(t) = \widetilde{M}_R(1+\mu)^t$ splňuje.

**Souhrn:**

**Ražebné ve spojitém čase**

Tištěním peněz může stát získávat reálné statky. Protože tištěním peněz nedochází k tvorbě bohatství, je tento výnos – ražebné – na úkor veřejnosti, která čelí poklesu kupní síly peněžních jednotek. Autoři používají model aukcí, na které vstupuje veřejnost s dříve emitovanými penězi a stát s nově emitovanými penězi. Státem získané statky na takové aukci odpovídají podílu nově emitovaných peněz na celkové peněžní poptávce. Na základě tohoto modelu aukcí autoři odvozují vzorec pro ražebné ve spojitém čase, které je za předpokladu jednotkového multiplikátoru a jednotkové rychlosti peněz rovno přirozenému logaritmu indexu růstu měnové báze dělenému součtem jedné a přirozeného logaritmu indexu růstu měnové báze. Takto vypočítané ražebné je menší než ražebné počítané na základě předpokladu diskrétních změn. Autoři ukazují, že ražebné je maximalizováno tehdy, pokud jsou nově emitované peníze utráceny státem během daného období plynule.

**Abstract:**

**Seigniorage in continuous time**

The government is able to acquire real goods through printing money. Because government does not create wealth through printing money, this revenue, the seigniorage, is at the expense of the public, as the purchasing power of monetary units decreases because of the issue of new money. The authors use the model of auctions to which the public comes with their money and the government with the newly issued money. The value of goods acquired by the government in such an auction equals the newly printed money divided by the sum of the newly printed money and the money spent by the public. Upon this auction model, the authors develop the formula for seigniorage in continuous time. The seigniorage calculated in this way is lower than the seigniorage calculated upon the assumption of discrete changes in economic variables.

**Literatura:**

**Auerheimer, L.:** The Honest Government‘s Guide to the Revenue from the Creation of Money. Journal of Political Economy, May/June 1974.(str. 598-606)

**Bailey, M. J.:** The Welfare Cost of Inflationary Finance. Journal of Political Economy, Volume 64, N. 2 (April 1956).(pp- 93-110)

**Cagan, P. (1956):** The Monetary Dynamics of Hyperinflation**. In: Friedman, M. (ed.):** Studies in the Quantity Theory of Money, University of Chicago Press, 1956. (str. 25-118)

**Easterly, W. – Mauro, P. – Schmidt-Hebbel, K. (1975):** Money Demand and Seigniorage-Maximizing Inflation. Journal of Money, Credit, and Banking, 27, 1995. (str. 583-603)

**Fischer, S. (1981):** Seigniorage and Fixed Exchange Rates: Optimal Inflation Tax Analysis. Working Paper N. 783, 1981, National Bureau of Economic Research.

**Friedman, M. (1971):** Government Revenue from Inflation. Journal of Political Economy, Vol. 79, N. 4 (July-August 1971). (pp- 846-856)

**Haslag, J. (1988):** Seigniorage Revenue and Monetary Policy. Economic Review, Federal reserve Bank of Dallas, Third Quarter 1998. (str. 10-20)

**Keynes, J. M. (1924):** A Tract on Monetary Reform. London, Macmillan 1924

**Mach, P. (2003):** Teorie ražebného a inflační daně. Disertační práce. VŠE Praha, 2003.

**Mankiw, G. (1987):** The Optimal Collection of Seigniorage: Theory and Evidence. Journal of Monetary Economics, 20, September 1987. (str.327-341)

**Marty, A. L.:** Growth and the Welfare Cost of Inflationary Finance. Journal of Political Economy No. 75, February 1967. (str. 71-76)

**Tobin, J. (1986):** On the Welfare Macroeconomics of Government Financial Policy. Scandinavian Journal of Economics, No. 1, Vol. 88 (1986). (str. 9-24)
**Walsh, C. E. (2001):** Monetary Theory and Policy, The MIT Press, London 2001.

**Key words:**

Seigniorage, inflation tax, money issue

**JEL Classification:**

E5 - Monetary Policy, Central Banking, and the Supply of Money and Credit