Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Bakalářská Práce

2008 Jakub Černý

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Černý

Odhady Value at Risk pro tržní a kreditní riziko

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní plán:	Finanční matematika

2008

Rád bych poděkoval hlavně vedoucímu mé bakalářské práce RNDr. Jiřímu Witzanymu, Ph.D., za čas a ochotu, se kterou se mi věnoval, za poskytnuté materiály, cenné rady a připomínky k textu. Dále Lukášovi Kopeckému za pomoc při tvorbě obrázků.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 11.12.2008 Jakub Černý

Obsah

Název práce: Odhady Value at Risk pro tržní a kreditní riziko
Autor: Jakub Černý
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.
e-mail vedoucího: witzanyj@vse.cz

Abstrakt: Tato práce studuje statistické odhady tržního a kreditního rizika pomocí míry rizika Value at Risk. Teoretická část popisuje definici Value at Risk, odhad Value at Risk pro tržní riziko variančně kovarianční metodou, metodou historické simulace, metodou simulace Monte Carlo a odhad Value at Risk pro kreditní riziko nejznámějšími metodami CreditMetrics, CreditRisk+ a KMV. Tato část je zakončena historickým vývojem a výpočtem kapitálové přiměřenosti. Analytická část práce rozebírá hlavní výhody a nevýhody Value at Risk na příkladu portfolia složeného z cenných papírů vázaných na reálné burzovní indexy. Cílem této práce je popsat Value at Risk jako celek, popsat její výhody a analyzovat nevýhody.
Klíčová slova: Value at Risk, Tržní VaR, Kreditní VaR, Kapitálová přiměřenost

Title: Estimations of market and credit Value at Risk
Author: Jakub Černý
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: witzanyj@vse.cz

Abstract: This present work studies statistical estimations of market and credit risk by measure of risk called Value at Risk. Theoretical part of this work describes the defintion of Value at Risk, estimations of Value at Risk for market risk by the variance and covariance method, by historical simulation method, by Monte Carlo simulation method and estimations of Value at Risk for credit risk by the most widely known methods CreditMetrics, CreditRisk+ and KMV. This part ends by historical development and calculation of capital adequacy. The analytical part of the work analyses main advantages and disadvantages of Value at Risk on the example of portfolio compact of exchange-traded funds. The aim of this work is to describe Value at Risk as a whole, describe its advantages and analyse disadvantages.
Keywords: Value at Risk, Market VaR, Credit VaR, Capital adequacy

Kapitola 1

Úvod

Řízení rizik je velmi důležité pro existenci a dobré fungování podniků, zvlášť bank a finančních institucí, u kterých by případný krach znamenal narušení finančního systému a ekonomiky celkově, nemluvě o újmě vkladatelů. Koncept hodnoty v riziku (Value at Risk) se v posledních dvou desetiletích stal základním kamenem řízení jak tržního, tak i kreditního rizika. Value at Risk (zkr. VaR) jako odhad maximální pravděpodobné ztráty je pro vedení bank a finančních institucí shrnutí veškerých rizik do jediného čísla, které již nevyžaduje hlubší matematické a statistické znalosti. Vedle toho má VaR i svá úskalí, která bude tato práce rozebírat.

Celá práce je rozdělena na dvě hlavní kapitoly, na teoretickou část a analytickou část.

V teoretické části jsou vysvětleny základní pojmy statistiky a finanční matematiky, definice VaR, odhady tržního VaR pomocí simulačních a analytických metod, nejznámější metody odhadu kreditního VaR. Odhad kreditního rizika pomocí metodologie CreditMetrics je rozebrán detailněji. Závěr teoretické části patří popisu kapitálových požadavků Basel I a Basel II.

V analytické části práce se zaměříme na výhody, ale hlavně nevýhody VaR demonstrované na příkladu s reálnými daty a možné alternativy této míry rizika v podobě koherentních měr nebo tzv. conditional VaR (zkr. CVaR). Pro analýzu dat použijeme program R.

Kapitola 2

Teoretická část

2.1 Definice a vymezení pojmů

V této kapitole si zadefinujeme pojmy z teorie pravděpodobnosti a finační matematiky, které budeme v následujícím textu běžně používat. Znalost těchto pojmů je k pochopení dalšího studia odhadů VaR (a rizika obecně) klíčová. Předpokladem jsou základní znalosti matematické analýzy, lineární algebry a teorie míry. Úplný aparát teorie pravděpodobnosti je popsán v [10].

2.1.1 Statistická část

Definice 1 (Rozdělení náhodné veličiny) *Rozdělením náhodné veličiny* X rozumíme míru

$$(\forall B \in \mathcal{B})\ P_X(B) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = P[X \in B], \tag{2.1.1}$$

kde $\omega \in \Omega$ je elementární jev a $\mathcal{B}$ je borelovská σ-algebra podmnožiny $\mathbb{R}$.

Definice 2 (Distribuční funkce) *Distribuční funkce* F náhodné veličiny X je

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ F(x) = P[X < x]. \tag{2.1.2}$$

Definice 3 Distribuční funkci F nazýváme absolutně spojitou, pokud existuje nezáporná borelovsky měřitelná funkce f taková, že

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u \tag{2.1.3}$$

Poznámka: Funkci f nazýváme hustota náhodné veličiny.

Definice 4 (Kvantilová funkce a kvantil) Nechť náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x), x \in \mathbb{R}$ Funkce

$$F^{-1}(u) = inf\{x : F(x) \geq u\},\ 0 \leq u \leq 1. \tag{2.1.4}$$

se nazývá *kvantilová funkce.*
Hodnoty kvantilové funkce se nazývají *kvantily.* Např. α-kvantil je hodnota $F^{-1}(\alpha)$.

Definice 5 (Střední hodnota) *Střední hodnota* náhodné veličiny X je definovaná předpisem

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\mathrm{d}F(x), \tag{2.1.5}$$

Střední hodnota sama o sobě nemá velkou vypovídací schopnost. Střední hodnota je reálné číslo, okolo kterého hodnoty náhodné veličiny kolísají. My pro účely měření rizik potřebujeme znát i odchylku od střední hodnoty.

Definice 6 (Rozptyl) *Rozptyl* náhodné veličiny je definován předpisem

$$var[X] = E[X - E[X]]^2 = \sigma_X^2. \tag{2.1.6}$$

Směrodatná odchylka

$$\sigma_X = \sqrt{var[X]}. \tag{2.1.7}$$

Definice 7 (Kovariance)

$$cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{2.1.8}$$

$$var[X \pm Y] = var[X] + var[Y] \pm 2cov(X, Y). \tag{2.1.9}$$

Speciálně $cov(X, X) = var[X]$.

Definice 8 (Korelace) Nechť $X, Y \in \mathcal{L}^2$, $var[X] > 0, var[Y] > 0$. Korelační koeficient veličin X a Y se značí $\rho(X, Y)$ nebo $cor(X, Y)$ a je definován vztahem

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var[X] \cdot var[Y]}}. \tag{2.1.10}$$

Definice 9 (Mnohorozměrné normální rozdělení) Nechť $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_r)^T$, kde $Z_1, \ldots, Z_r$ jsou nezávislé náhodné veličny, $Z_i \sim N(0, 1), \quad i = 1, \ldots, r$. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times r$. Vezměme $\mathbf{X} = \mathbf{AZ} + \boldsymbol{\mu}$, kde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$. Pak říkáme, že $\mathbf{X}$ má *mnohorozměrné normální rozdělení* s parametry μ *a* $\Sigma = \mathbf{AA}^T$. Značíme $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

Kovarianční matici můžeme přepsat jako

$$\Sigma = E[(\mathbf{X} - E\mathbf{X})(\mathbf{X} - E\mathbf{X})^T]$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & cov_{12} & \dots & cov_{1n} \\ cov_{21} & \sigma_{22}^2 & \dots & cov_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{n1} & cov_{n2} & \dots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

Definice 10 (Markovův řetězec) Posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *Markovův řetězec,* jestliže

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n-1} = j | X_n = i),$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S, S \subset \mathbb{Z}$ je množina stavů řetězce.

Definice 11 (Pravděpodobnost přechodu) Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, potom se

$$p_{ij}(n, n+1) = P(X_{n+1} = j, X_n = i)$$

nazývá *pravděpodobnost přechodu* ze stavu i (v čase n) do stavu j (v čase $n+1$). Pokud $p_{ij}(n, n+1) = p_{ij}$ nezávisí na n, nazývá se Markovův řetězec *homogenní.*

Definice 12 (Matice přechodu) Nechť pro každé $i \in S$ existuje $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $P(X_n = i) > 0$ a tak pravděpodobnost $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$ je pro každé $j \in S$ definována, pak můžeme ze všech těchto pravděpodobností sestavit čtvercovou matici $\mathbf{P}$. Symbolicky zapíšeme

$$\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j \in S}$$

a nazýváme *maticí pravděpodobností přechodu.*

Věta 1 (Choleského rozklad) *Pro každou symetrickou, pozitivně definitní matici $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n, x^T \mathbf{V} x > 0)$ existuje právě jedna dolní trojúhelníková matice $\mathbf{L}$ taková, že*

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}, \tag{2.1.11}$$

kde diagonální prvky matice $\mathbf{L}$ jsou větší než nula a $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz se provede indukcí.

□

2.1.2 Finanční část

V této části se budeme věnovat pojmům finanční matematiky. Narozdíl od statistiky se ve finanční matematice nedá vše striktně a jednoznačně zadefinovat. Proto budeme používat kromě definic i obecná označení, která mohou být interpretována různě.

Dále v textu budeme portfolio chápat jako soubor aktiv a pasiv s určitou hodnotou, která se v čase mění.

Definice 13 (Relativní a absolutní ztráta) Nechť V_t je hodnota portfolia v čase $t = 0, 1, \ldots, T$, kde V_T je hodnota v čase T a V_0 je počáteční hodnota. Potom

$$X_T = V_T - EV_T, \tag{2.1.12}$$

je *relativní ztráta* (resp. *zisk*) v čase T, pokud je X_T záporný (resp. kladný). Podobně

$$X_T = V_T - V_0 \tag{2.1.13}$$

je *absolutní ztráta* (resp. *zisk*) v čase T, pokud je X_T záporný (resp. kladný).

Riziko

Pod pojmem *rizika* rozumíme budoucí možnost ztrát. Tuto možnost můžeme charakterizovat rozdělením ztrát, které mohou nastat.

Tržní riziko

Tržní riziko je rozdělení ztrát, které jsou funkcí tržních faktorů. Hlavními tržními faktory jsou: úrokové sazby, měnové kurzy, ceny akcií, ceny komodit a ceny podkladových instrumentů.

Kreditní riziko

Kreditní riziko je rozdělení ztrát, které jsou funkcí kreditních faktorů. Jedním z hlavních kreditních faktorů je ohodnocení protistrany (rating).

Kreditní riziko může vzniknout, nebo se změnit v závislosti na ratingu dvěma způsoby: 0-1 způsob a způsob změny ratingu. 0-1 způsob ohodnocuje pouze na selhal-neselhal (tzv. default mode). Způsob změny ratingu ohodnocuje podle toho, v jaké ratingové kategorii se protistrana nachází (tzv. mark-to-market mode). Z toho plyne, že mark-to-market mode zahrnuje default mode.

Definice 14 (Lineární a nelineární portfolio) Nechť $P_1, P_2, \ldots, P_n$ jsou ceny (náhodné veličiny) jednotlivých aktiv $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$. *Lineárním portfolio* je každé portfolio, jehož cena (hodnota) je jeho lineární kombinací $w_1P_1 + w_2P_2 + \cdots + w_nP_n$, kde w_i je váha i-tého aktiva v portfoliu. Pokud portfolio není lineární kombinací vážených cen, nazýváme ho *nelineární*.

Definice 15 (Kovarianční matice výnosů) Nechť $i, j \in \mathbb{N}$, σ_j je standartní odchylka denní relativní změny tržního faktoru j a $\rho_{i,j}$ je korelace relativních denních změn tržních faktorů i a j. Potom se

$$\mathbb{V}_{i,j} = \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j},$$

nazývá *kovarianční matice výnosů.*

Definice rizika, kterou jsme si uvedli, je pouze jednou z mnoha. Proto existují i různé míry rizika jako např. standartní odchylka, Value at Risk nebo CVaR.

Definice 16 (Směrodatná (standartní) odchylka) Nechť R_T je relativní změna ceny v čase T vyjádřená jako

$$R_T = \frac{V_T - V_0}{V_0}$$

a zároveň je R_T náhodná veličina. Potom

$$\sigma(R_T) = \sqrt{var(R_T)}, \tag{2.1.14}$$

je riziko vyjádřené *směrodatnou (standartní) odchylkou.*

Ve finanční oblasti se takto vyjádřené směrodatné odchylce někdy také říká *volatilita.*

Mírou Value at Risk se budeme zabývat ve zbývajícím textu. V analytické části rozebreme CVaR jako řešení při nedostatečném pokrytí málo pravděpodobných ztrát mírou Value at Risk.

2.2 Value at Risk

2.2.1 Absolutní VaR

Za pomocí pojmů z kapitoly 2 si již můžeme formulovat slovní i matematickou definici Value at Risk (dále jen VaR).

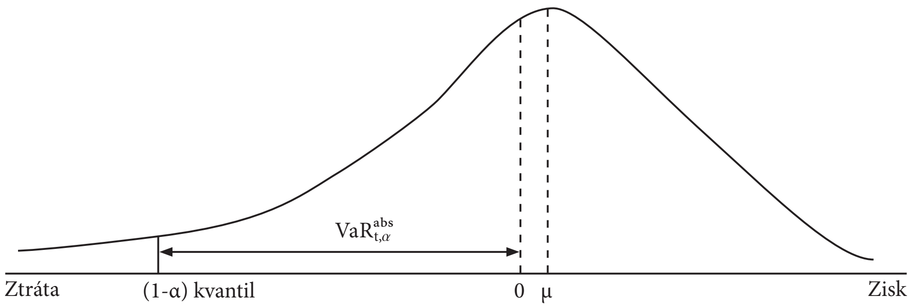
Pro dané portfolio aktiv a pasiv, v časovém horizontu t a s pravděpodobností α, představuje $\mathrm{VaR}_{t,\alpha}$ maximální potenciální ztrátu X vůči počáteční hodnotě, ke které může dojít v časovém horizontu t s pravděpodobností $1-\alpha$. Tedy s pravděpodobností α bude ztráta nižší než X a s pravděpodobností $1-\alpha$ ztráta bude X a více.

Definice 17 (Value at risk) Nechť $\alpha \in (0,1)$ je hladina spolehlivosti a X je ztráta, potom

$$\mathrm{VaR}^{abs}_{t,\alpha} = -inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1-\alpha\}.$$

nazýváme absolutní VaR.

Jinými slovy je VaR kvantil rozdělení ztráty (dle rovnice (2.1.4)).



Obrázek 2.1: Grafické znázornění absolutní VaR

2.2.2 Relativní VaR

Používá se i tzv. relativní hodnota v riziku $\mathrm{VaR}^{rel}_{t,\alpha}$ definovaná jako

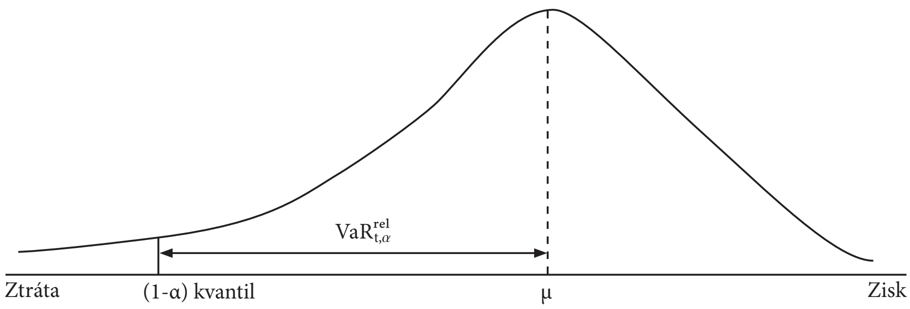
$$\mathrm{VaR}^{rel}_{t,\alpha} = E[X] + \mathrm{VaR}^{abs}_{t,\alpha} \tag{2.2.1}$$

Relativní VaR je více využívaná než absolutní VaR, jak se budeme moci přesvědčit u metody variance a kovariance (kapitola 2.3.1). Budeme uvažovat portfolio s hodnotou P_0 a míru zisku jako náhodnou veličinu R přes časový interval se střední hodnotou μ. A $(1-\alpha)$-kvantil náhodné veličiny R označíme jako R^*. Potom je

$$\mathrm{VaR}^{abs}_{t,\alpha} = -P_0 R^* \tag{2.2.2}$$

a relativní hodnota

$$\mathrm{VaR}^{rel}_{t,\alpha} = \mu P_0 + \mathrm{VaR}^{abs}_{t,\alpha} = P_0\mu - P_0 R^* = P_0(\mu - R^*). \qquad (2.2.3)$$



Obrázek 2.2: Grafické znázornění relativní VaR

Dále nebudeme horní index u označení VaR používat, pokud nebude předem řečeno jinak, jedná se o relativní VaR.

2.2.3 Parametrický a neparametrický VaR

Způsob, jakým jsme si zadefinovali VaR, se opírá o distribuční funkci. Ze skutečnosti, že máme k dispozici jen omezený počet historických dat, plyne, že neznáme přesnou distribuční funkci a tím pádem ani VaR. Avšak my si můžeme distribuční funkci odhadnout tak, že odhadnutá distribuční funkce se bude blížit k té skutečné.

Posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin X_i pro $i = 1, \ldots, n$ se nazývá *náhodný výběr.*

Pro statistické zpracování však nejsou k dispozici náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$, ale jejich skutečně napozorované hodnoty $x_1, \ldots, x_n$, které označujeme jako *pozorování* náhodného výběru.

Označme skutečnou distribuční funkci náhodných veličin X_i jako F_0. Tuto distribuční funkci neznáme.

Musíme stanovit *model*, tj. množinu $\mathcal{F}$ všech rozdělení, kterých pozorování x_i mohou nabývat. Musí platit $F_0 \in \mathcal{F}$.

Možnosti pro model $\mathcal{F}$:

(i) množina všech rozdělení na $\mathbb{R}$ s konečnou střední hodnotou nebo konečným rozptylem. Pak odhadujeme např. $\mathrm{E}X_i$, $\mathrm{var}X_i$ a nazýváme neparametrický model. Neparametrický model nám poslouží při odhadu tzv. *neparametrického VaR*, na kterém jsou založeny simulační metody. Např. metoda historické simulace (kapitola 2.3.2) a metoda simulace Monte Carlo (kapitola 2.3.3).

(ii) množina rozdělení určitého typu, např.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{\text{všechna exponenciální rozdělení s parametrem } \lambda > 0\} \\ \mathcal{F} &= \{\text{všechna normální rozdělení s parametry } \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\} \end{aligned}$$

Pak odhadujeme parametr λ, nebo $\begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$ a nazýváme parametrický model. Parametrický model slouží k odhadu tzv. *parametrického VaR*, na kterém jsou založeny parametrické metody. Např. metoda variance a kovariance.(kapitola 2.3.1)

2.3 Tržní VaR

Tržní VaR je mírou tržního rizika. Metody v této kapitole nejsou určeny pouze pro měření tržního VaR, ale pro VaR obecně. Uvádím ho v této kapitole, protože VaR byl zaveden v první řadě pro měření tržního rizika a regulátoři povolují interní metody měření tržního rizika, z nichž nejpoužívanější a nejvíc regulátory akceptovaná je právě VaR.

Základní přístupy ke statistické analýze VaR jsou:

- parametrický přístup - Metoda variance a kovariance
- empirický (výběrový) přístup - Historická simulace
- celková analýza - Metoda Monte Carlo a stress testing

VaR je příkladem statistického měření cenového rizika. Je to statistický odhad, ve kterém je potenciální ztráta portfolia reprezentována jedním číslem (její hodnotou) na určité hladině spolehlivosti.

Často se pro měření VaR předpokládá tzv. *statické portfolio*. To znamená, že měříme potenciální ztrátu hodnoty portfolia na nějaké hladině spolehlivosti s danou množinou potenciálních ztrát vzhledem k tržním sazbám vypočítaným za podmínky, že složení portfolia se nezmění.

VaR je obvykle měřena jako potenciální ztráta hodnoty statického portfolia vzhledem ke změnám v tržních sazbách. Pro mnoho, ne-li většinu, portfolií obchodovatelných produktů se pro přesné nebo realistické měření tržního rizika po dobu delší než 1 den vyžaduje modelování VaR v různých časových horizontech a stress testing.

2.3.1 Metoda variance a kovariance

U metody variance a kovariance předpokládáme, že zisky a ztráty mají sdružené normální rozdělení. Dále předpokládáme, že portfolio (jednotlivé instrumenty) se dá rozložit na jednotlivé finanční toky a tento rozklad je lineární. Takže současná hodnota oceňující portfolio (pozici v portfoliu) je lineární funkce současných hodnot jednotlivých finančních toků. Z těchto předpokladů plyne, že tato lineární funkce má sdružené normální rozdělení. To nám zjednoduší výpočet, protože potom je VaR násobek směrodatné odchylky portfolia. Pro odhadnutí VaR musíme znát kovarianční matici výnosů a váhy jednotlivých pozic v portfoliu. Z těch určíme směrodatnou odchylku, kterou vynásobíme počáteční hodnotou portfolia a kvantilem normálního rozdělení, který určíme dle hladiny spolehlivosti.

Když se vrátíme zpět k rovnicím (2.2.2) a (2.2.3) a budeme předpokládat, že míra zisku má normální rozdělení ($R \sim N(\mu, \sigma^2)$). Pak se $(1-\alpha)$-kvantil R vyjádří jako

$$R^* = \mu - \sigma \cdot u_\alpha, \tag{2.3.1}$$

kde

$$-u_{1-\alpha} = u_\alpha. \tag{2.3.2}$$

Pro absolutní VaR tedy platí

$$\mathrm{VaR}_{t,\alpha} = -P_0 \cdot (\mu - \sigma u_\alpha) \tag{2.3.3}$$

a pro relativní

$$\mathrm{VaR}_{t,\alpha} = P_0(\mu - (\mu - \sigma u_\alpha)) = P_0 \sigma u_\alpha, \tag{2.3.4}$$

což přesně odpovídá definici jednodenního VaR pro portfolio o jednom instrumentu.

Předpoklad normálního rozdělení nám umožňuje snadné přechody mezi různými hladinami spolehlivosti. Dle statistických tabulek si můžeme dohledat příslušný kvantil a VaR snadno přepočítat.

Hladina spolehlivosti	**Kvantil**
90%	1.282
95.4% (Citibank)	1.695
95% (Riskmetrics)	1.644
99% (BIS Requirements)	2.326

Tabulka 2.1: Často používané kvantily pro výpočet VaR

Jednodenní VaR na hladině 95% spočítáme jako:

$$\mathrm{VaR}_{1,0.95} = P_0 \cdot 1.644 \cdot \sigma_1$$

Při výpočtu VaR se předpokládá realističtější průměrná doba držení t aktiva (např. $t = 10$, 20, 250). A nás zajímá VaR právě za toto období. Díky předpokladu nezávislosti můžeme rozptyl odhadnout jako

$$\sigma_t^2 = t \cdot \sigma_1^2. \tag{2.3.5}$$

Z toho plyne, že směrodatná odchylka je

$$\sigma_t = \sqrt{t}\sigma_1. \tag{2.3.6}$$

V případě, že bychom neměli k dispozici jednodenní volatilitu, ale volatility v časech t_1, t_2, pak můžeme přepsat (2.3.6) jako

$$\begin{aligned} \sigma_{t_1} &= \sqrt{t_1}\sigma_1, \\ \sigma_{t_2} &= \sqrt{t_2}\sigma_1, \end{aligned}$$

což je

$$\sigma_{t_2} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}\sigma_{t_1}. \tag{2.3.7}$$

Následně aplikujeme na vzorec (2.3.4)

$$\mathrm{VaR}_{t_2,\alpha} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}\mathrm{VaR}_{t_1,\alpha}. \tag{2.3.8}$$

Jinými slovy můžeme VaR upravit podle různých period držení pouze změnou poměru druhých odmocnin těchto period. Takže předpoklad normálního rozdělení nám říká o VaR s jakýmikoliv kombinacemi hladin spolehlivosti a dobami držení úplně vše.

Již jsme si řekli, že banky podléhají kapitálovým požadavkům (CAD) (kapitola 2.6). Komise[1] požaduje od banky alespoň desetidenní volatilitu a hladinu spolehlivosti 99%. V [11] je hladina spolehlivosti 95% a jednodenní volatilita. Takže platí jednoduchý vztah

$$\mathrm{VaR}_{CAD} \doteq 2.326 \cdot \sigma_{10} \cdot P_0 \doteq \frac{2.326}{1.644} \cdot \sigma_1 \cdot \sqrt{10} \cdot P_0 \doteq 4.5 \cdot \mathrm{VaR}_{RiskMetrics}.$$

Veškeré výpočty metodou variance a kovariance, které jsme si zde ukázali se zabývají pouze jedním aktivem. Abychom mohli počítat VaR celého portfolia (jedná se o lineární portfolio viz Definice 14), potřebujeme další vstup do výpočtu a tím jsou korelace mezi jednotlivými rizikovými faktory a také vzájemné korelace mezi pozicemi v portfoliu. Nechť portfolio obsahuje k aktiv a P_i je hodnota investovaná do i-tého aktiva, potom můžeme zobecnit výpočet rozptylu jako

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} P_i P_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}, \tag{2.3.9}$$

[1] Basel Comitee

což můžeme ještě upravit

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} P_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j<i} \rho_{ij} P_i P_j \sigma_i \sigma_j. \tag{2.3.10}$$

Potom můžeme zobecnit i výpočet VaR

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{t},\alpha} = \sqrt{\mathbf{P} \times \mathbb{V} \times \mathbf{P}^T}, \tag{2.3.11}$$

kde $\mathbf{P} = (u_{1-\alpha} \cdot P_1, \ldots, u_{1-\alpha} \cdot P_k)$ a $\mathbb{V}$ je kovarianční matice.

Doposud jsme se zabývali tzv. lineárním modelem. Nejjednodušší aplikací lineárního modelu je portfolio bez derivátů obsahující pouze pozice v cizí měně, akciích, komoditách a dluhopisech (dluhopisy při zanedbání konvexity). Jinými slovy je naše portfolio lineární, tedy výnosy portfolia jsou lineárně závislé na výnosech jednotlivých aktiv tvořících portfolio.

Příkladem derivátu v lineárním modelu je forwardový kontrakt ke koupi cizí měny, na který můžeme pohlížet jako na směnu cizího bezkupónového dluhopisu s domácím bezkupónovým dluhopisem. Pro účely výpočtu VaR je forward upraven tak, že dlouhá pozice je pro cizí dluhopis a krátká pozice pro domácí dluhopis.

Jako další příklad můžeme uvažovat úrokový swap. Na ten můžeme pohlížet jako na směnu dluhopisu s pohyblivou sazbou s dluhopisem s fixní sazbou.

Nyní budeme uvažovat lineární model se zahrnutím opcí. Předpokládejme portfolio obsahující opci na jedinou akcii, jejíž cena je S. Potom je

$$\Delta = \frac{\delta P}{\delta S} \tag{2.3.12}$$

míra změny hodnoty portfolia S, kde δS je jednodenní změna ceny akcie a δP je jednodenní změna hodnoty portfolia. Pak můžeme definovat

$$\delta x = \frac{\delta S}{S}, \tag{2.3.13}$$

jako jednodenní změnu ceny.

Nyní můžeme změnu ceny lineárně aproximovat

$$\delta P = \Delta \cdot S \cdot \delta x. \tag{2.3.14}$$

Pro pozice v k podkladových tržních proměnných zahrnujících opce můžeme odvodit lineární vztah mezi δP a $\delta x_i, i = 1, \ldots, k$ analogicky

$$\delta P = \sum_{i=1}^{k} S_i \cdot \Delta_i \cdot \delta x_i, \tag{2.3.15}$$

kde S_i je hodnota i-té tržní proměnné a Δ_i míra změny hodnoty portfolia vzhledem k i-té tržní proměnné.

Pokud však budeme uvažovat portfolio s opcemi, bude lineární model pouhou aproximací. Model, který jsme si uvedli výše, se také nazývá delta normální aproximace. Delta je zde míra změny hodnoty portfolia vzhledem k podkladovému aktivu (tržní proměnné) označena jako Δ. Pro zpřesnění našich výpočtů budeme používat kvadratický model, tzv. delta gamma aproximaci. Gamma je v tomto případě míra změny delty vzhledem k tržní proměnné a budeme ji značit Γ. Γ má velký vliv na výpočet VaR, protože mění šikmost pravděpodobnostního rozdělení podle znaménka a výpočet VaR je závislý na levém konci tohoto rozdělení. Pokud budeme porovánat rozdělení portfolia s hustotou normálního rozdělení, pak má negativní (resp. pozitivní) Γ tendenci k těžšímu chvostu (resp. méně těžkému chvostu). Potom z předpokladu normálního rozdělení bude VaR velmi malá (resp. velká).

Předpokládejme portfolio o jednom aktivu, jehož hodnota je S. Potom zlepšení delta normální metody za pomocí Taylorova rozvoje můžeme zapsat rovnicí

$$\delta P = \Delta \delta S + \frac{1}{2}\Gamma(\delta S)^2. \tag{2.3.16}$$

Dle rovnice (2.3.13) můžeme upravit

$$\delta P = S\Delta \delta x + \frac{1}{2}\Gamma S^2(\delta x)^2. \tag{2.3.17}$$

Pro portfolio o k podkladových aktivech, kde každý z instrumentů v portfoliu je závislý pouze na jedné z tržních proměnných, můžeme rovnici (2.3.16) přepsat

$$\delta P = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i S_i \delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \Gamma_i S_i (\delta x_i)^2, \tag{2.3.18}$$

kde S_i je hodnota i-té tržní proměnné a Δ_i a Γ_i jsou míry vzhledem k i-té proměnné. Výpočet pro lineární a kvadratický model je převzat z [8]. Podrobnější popsání kvadratického modelu lze najít v [6].

2.3.2 Historická simulace

Metoda historické simulace je založena na tom, že máme k dispozici dostatečně velký objem dat. Pak můžeme pomocí této metody odhadovat VaR.

Postupujeme tak, že si shromáždíme data (výnosy jednotlivých instrumentů portfolia) z minulého období (nebo minulých období - záleží na instituci, např. banky odhadují VaR denně). Do časové řady, která nám vznikne započítáme i současný stav portfolia. Z těchto dat odhadneme VaR jako kvantil hustoty rozdělení (Definice 17).

Z této metody vyplývá, že riziko se měří pomocí cenových změn: absolutní změnou, relativní změnou a logaritmickou změnou v ceně. Pokud je změna ceny definována jako relativní k nějaké počáteční ceně, pak této změně říkáme výnos (míra návratnosti).

Jednodenní období

Nechť je P_t cena v čase t. Nyní t reprezentuje jeden obchodní den. Absolutní míra zisku mezi obdobími t a $t-1$ je

$$D_t = P_t - P_{t-1}. \tag{2.3.19}$$

Relativní míra zisku, nebo výnos, R_t pro stejné časové období je

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \tag{2.3.20}$$

Logaritmická míra zisku odpovídá

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1 + R_t). \tag{2.3.21}$$

Dále v textu budeme u metody historické simulace využívat relativní míru zisku. Pro logaritmickou se všechny výpočty a odvození provedou analogicky.

k-denní období

Jak je výše uvedeno, tak R_t je popsán jako jednodenní výnos. Nyní ukážeme, jak ho využít k výpočtu výnosů za více jak jednodenní období.
k-denní výnos je definován:

$$R_t(k) = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}. \tag{2.3.22}$$

Dle výpočtu změny za jeden den můžeme vyjádřit výnos $1+R_t(k)$ pomocí součinu výnosů za každý den.

$$\begin{aligned} 1 + R_t(k) &= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \ldots (1 + R_{t-k-1}) \\ &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{P_{t-k-1}}{P_{t-k}} \\ &= \frac{P_t}{P_{t-k}}. \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Nechť $t = 1, \ldots, T$ jsou jednotlivá období. Když je lineární portfolio tvořeno N aktivy, pak $R_{j,t}$ je výnos j-tého aktiva v období t a $w_{j,T}$ jsou jednotlivé současné váhy j-tého aktiva v tomto portfoliu. Potom výnos portfolia $R_{p,t}$ v období t můžeme spočítat jako

$$R_{p,t} = \sum_{j=1}^{N} w_{j,T} R_{j,t}. \tag{2.3.24}$$

Hodnoty spočítané pomocí rovnice (2.3.24) si seřadíme podle velikosti

$$R_{p,(1)} < R_{p,(2)} < \cdots < R_{p,(T-1)} < R_{p,(T)}.$$

A určíme empirický $(1-\alpha)$-kvantil, $0 < \alpha < 1$ (tzv. "cut off point")

$$\widetilde{u}_{(1-\alpha)} = \begin{cases} R_{(\lfloor T(1-\alpha)\rfloor+1)}, & \text{pokud} \quad T(1-\alpha) \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}\big(R_{(T(1-\alpha))} + R_{(T(1-\alpha)+1)}\big), & \text{pokud} \quad T(1-\alpha) \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.3.25}$$

vzhledem k dané hladině spolehlivosti. To jest hodnotu, kterou nepřesáhnou předpokládané ztráty. Absolutní VaR vypočteme jako

$$VaR_{t,\alpha} = -\widetilde{u}_{(1-\alpha)} \cdot P_0. \tag{2.3.26}$$

Postup pro výpočet cut off pointu je převzat z [5].

Odhad VaR pomocí historické simulace pro portfolio nelineárních instrumentů se od odhadu pro lineární portfolio liší. Identifikujeme jednotlivé tržní faktory, které ovlivňují portfolio. Potom shromáždíme data změn těchto tržních proměnných během nějakého daného časového období t, tentokrát je $t = 0, \ldots, T$. Pro nelineární portfolio si vytvoříme dnes (j-tý den) T scénářů toho, jak se veličina bude chovat zítra ($j+1$ den) podle historického vývoje časové řady.

Definice 18 Nechť V_i^k je hodnota k-té tržní proměnné ($k = 1, \ldots, n$) v i-tý den ($i = 1, \ldots, m$). Předpokládejme, že dnes je j-tý den. Potom i-tý scénář hodnoty tržní proměnné zítra (v $j+1$ dni) se rovná

$$V_{j+1,i}^k = V_j^k \frac{V_i^k}{V_{i-1}^k}. \tag{2.3.27}$$

Dopočítáme celkovou hodnotu portfolia pro každý scénář a označíme ji

$$P_{j+1,i} = f(V_{j+1,i}^1, \ldots, V_{j+1,i}^n), \tag{2.3.28}$$

kde f je funkce tržních proměnných.

Vypočítáme relativní změnu

$$R_{p,i} = \frac{P_{j+1,i} - P_j}{P_j}, \tag{2.3.29}$$

kde P_j je hodnota portfolia v j-tý den.

Dále postupujeme stejně jako u lineárního portfolia.

Z toho plyne, že lineární portfolio je speciálním případem portfolia nelineárního.

2.3.3 Metoda Monte Carlo

Alternativou k přístupům, které jsme si výše zmínili je přístup založený na využití simulace Monte Carlo. U metody historické simulace jsme si zmínili, že její nevýhodou je předpoklad velkého objemu dat. Metoda Monte Carlo je simulace vývoje hodnoty portfolia využívající historická data k odhadu parametrů tržních faktorů, jejich následné simulace, tím pádem i simulace hodnoty portfolia a výsledek v podobě zisku nebo ztráty. Simulujeme náhodné procesy, které pak udávají ceny jednotlivých aktiv vytvářejících portfolio. Metoda Monte Carlo nám pomáhá ocenit i těžko ocenitelné finanční instrumenty. Díky přizpůsobivosti této metody ji můžeme aplikovat na různá další rizika (např. kreditní). V textu budeme používat pojem náhodná čísla, je však nutné si uvědomit, že počítačem generovaná čísla jsou pseudonáhodná.

Při aplikaci této metody si nejdříve zvolíme model specifikující chování jednotlivých instrumentů portfolia a odhadneme parametry. Můžeme volit např. model náhodné procházky, Brownův pohyb (Wienerův proces). Budeme používat přírůstkový model rovnice Brownova pohybu ceny akcie S_t jako

$$S_{t+\Delta t} - S_t = S_t(\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t), \tag{2.3.30}$$

kde μ je bezriziková míra zisku tržní ceny akcie, σ je volatilita tržní ceny akcie, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ v čase t a Δt je přírůstek času. Pokud budeme uvažovat $\Delta t = 1$, potom

$$S_{t+1} - S_t = S_t(\mu \ + \sigma \varepsilon_t), \tag{2.3.31}$$

Z rovnice (2.3.30) si můžeme vyjádřit střední hodnotu

$$E(S_{t+\Delta t} - S_t | S_t) = S_t \mu \Delta t \tag{2.3.32}$$

a směrodatná odchylka

$$\sqrt{var(S_{t+\Delta t} - S_t | S_t)} = S_t \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t. \tag{2.3.33}$$

Pokud aplikujeme simulaci Monte Carlo na portfolio o více složkách, musíme odhadnout i korelační strukturu výnosů jednotlivých aktiv portfolia. Můžeme využít kovarianční matici (Definice 15) a upravit si ji dosazením (Definice 8). Vznikne nám korelační matice

$$\mathbf{Cor} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3.34}$$

V mnohorozměrném případě je simulace náhodných vektorů $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{Cor})$ mnohem složitější než v případě jednorozměrném. My si však pomůžeme mnohorozměrným normovaným normálním rozdělením $N_n(\mathbf{0}, \mathbb{I})$, kde $\mathbf{0}$ je nulový vektor a $\mathbb{I}$ je jednotková matice. Budeme simulovat náhodné vektory $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbb{I})$, které jsou navzájem nezávislé. Již víme, že kovarianční matice je pozitivně semidefinitní, z toho plyne, že i korelační matice je pozitivně semidefinitní. Takže můžeme provést Choleského rozklad $\mathbf{Cor} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, kde $\mathbf{A} = a_{ij}$ (Věta 1). Potom touto transformací dostaneme požadovaný vektor ε

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11}\eta_1, \\ \varepsilon_2 &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2, \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \dots + a_{nn}\eta_n, \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

což lze zapsat maticově jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}. \tag{2.3.36}$$

Pro dvourozměrný případ (dvě aktiva) vypadá matice A takto

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix},$$

z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \eta_1, \\ \varepsilon_2 &= \rho\eta_1 + \sqrt{1-\rho^2}\eta_2. \end{aligned}$$

Použitím vhodného generátoru a modelu nasimulujeme rozdělení ceny portfolia a pomocí výstupu v podobě histogramu můžeme již najít VaR.

2.4 Kreditní VaR

2.4.1 Kreditní riziko a VaR

Potenciálním selháním nebo změnou důvěryhodnosti (ratingu) dlužníků, protistran v transakcích s deriváty a emitentů dluhopisů vzniká a roste velmi významné kreditní riziko bank a jiných finančních institucí, jehož mírou rizika je právě kreditní VaR. Pro velký význam kreditního rizika se většina finančních institucí věnuje měření a řízení kreditního rizika. Regulátoři vyžadují od bank, aby udržovaly takový kapitál, který kreditní riziko pokryje. Pro výpočet tržního rizika povoluje Komise využít plně interní systémy a modelování banky. U kreditního rizika Komise povoluje bankám pouze interní výpočty ratingů, jinak je výpočet kreditního rizika striktně definován právě Komisí.

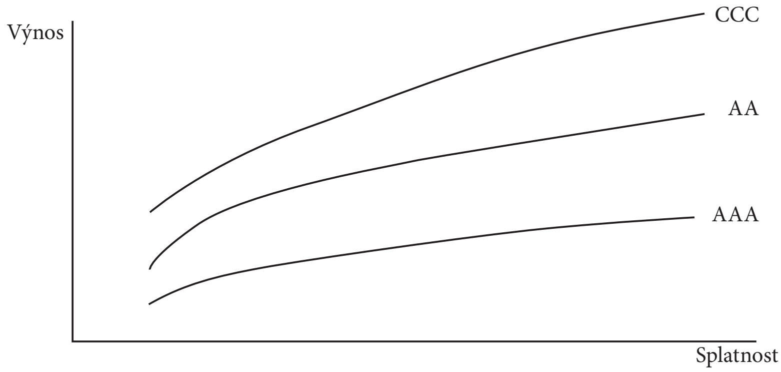
2.4.2 Pravděpodobnost selhání a kreditní rating

Pravděpodobnost kreditního selhání (pravděpodobnost defaultu) je pravděpodobnost toho, že protistrana nedodrží platební podmínky dané smlouvou. Tyto pravděpodobnosti většinou oceňují kreditní oddělení na základě informací o důvěryhodnosti klienta (finanční výkazy, úvěrový návrh, jeho působení v minulosti). Využívají svůj vlastní ohodnocovací systém, tzv. kreditní rating. Mimo tyto interní postupy je možné využít (např. pro důležitější klientelu) vnější ratingy poskytované specializovanými agenturami jako např. Standart & Poor's nebo Moody's.

Ratingové agentury Moody's nebo Standart & Poor's (dále jen S&P) vytvářejí ratingy, popisující úvěruschopnost podnikových cenných papírů (dále jen CP). Pokud použijeme systém ratingu S&P, nejlepší ohodnocení je AAA. CP s tímto ratingem jsou považovány za neschopné selhání (defaultu). Druhý nejlepší rating je AA, dále následuje A, BBB, BB, . . . ,Default (někdy také značené jako D). Přičemž pouze rating BBB a lepší spadají do tzv. investičního stupně. Ratingy agentury Moody's korespondují s ratingy S&P, takže AAA, AA, A, BBB, BB odpovídají Aaa, Aa, A, Baa, Ba. Abychom mohli vytvořit lepší ohodnocení cenných papírů, vytvořily agentury ještě podskupiny těchto ratingů. S&P rozděluje A rating na A+, A, A-, stejně bychom mohli rozdělit všechny ostatní. Moody's rozděluje A rating na A1, A2, A3. Dle mého názoru je zvyšování počtu ratingů správné, protože jsou velké rozdíly mezi jednotlivými protistranami. Na druhou stranu bude jejich počet vždy shora omezený.

2.4.3 Výnosové křivky a recovery rate

Obchodníci s cennými papíry vyvinuli procedury pro zahrnutí kreditního rizika do svých výpočtů při oceňování podnikových cenných papírů. Shromažďují tržní data aktivně obchodovaných CP pro výpočet bezkupónové výnosové křivky pro každou ratingovou kategorii.



Obrázek 2.3: Spreadové křivky

Prvním krokem odhadu pravděpodobností defaultu z cen CP je spočítat očekávané ztráty způsobené defaultem podnikových CP s různými dobami splatnosti. To zahrnuje porovnání cen podnikových CP s cenou bezrizikových CP se stejnou dobou splatnosti a stejným kupónem. Obvyklý předpoklad je, že současná hodnota nákladů na default se rovná rozdílu mezi cenami bezrizikových CP a podnikových cenných papírů. To znamená, že vyšší výnos podnikových CP je odškodnění možných ztrát z defaultu. Cena bezrizikového CP se spočítá dle bezrizikové výnosové křivky. Přirozená volba bezrizikové křivky je křivka státních CP (pokladničních poukázek). V následujících výpočtech předpokládejme rizikově neutrální prostředí.

Definice 19 Nechť y_T je výnos podnikového bezkupónového CP na T let. Nechť $\overline{y}_T$ je bezrizikový výnos podnikového bezkupónového CP na T let. Potom cena bezrizikového bezkupónového CP s dobou splatnosti T let s nominální hodnotou P_{NH} je

$$P_{NH}e^{-\overline{y}_T T}.$$

a diskontovaná očekávaná ztráta z defaultu je

$$P_{NH}(e^{-\overline{y}_T T} - e^{-y_T T}).$$

Označme pravděpodobnost defaultu $P_D(t)$ v čase t, kde $t = 0, 1, \ldots, T$. Pokud nepředpokládáme žádnou návratnost v okamžiku defaultu, je výpočet $P_D(t)$ snadný.

Nechť je $P_D(T)$ pravděpodobnost, že podnikové CP budou mít hodnotu nula v době splatnosti a pravděpodobnost 1-$P_D(T)$, že hodnota bude P_{NH}. Hodnota CP je nyní

$$P_D(T) \cdot 0 + (1 - P_D(T))P_{NH}e^{-\overline{y}(T)T} = P_{NH}(1 - P_D(T))e^{-\overline{y}(T)T}.$$

Výnos CP je $y(T)$, tedy

$$P_{NH}e^{-y(T)T} = P_{NH}(1 - P_D(T))e^{-\overline{y}(T)T},$$

z toho plyne

$$P_D(T) = 1 - e^{-(y(T)-\overline{y}(T))T} \tag{2.4.1}$$

Nyní jsme nepředpokládali návratnost v okamžiku defaultu, to ovšem není realistické.Pokud protistrana selže, potom má věřitel právo vymáhat své pohledávky na aktivech, která prostistraně ještě zbyla. Výši vymáhané částky (předem dané procento z celkové výše nároků) si zadefinujeme jako recovery rate, kterou věřitel obdrží v okamžiku defaultu. Při zvyšování recovery rate se kreditní riziko snižuje, nikoliv zaniká.

Označme si RR jako recovery rate, potom hodnota CP je

$$(1 - P_D(T))P_{NH}e^{-\overline{y}(T)T} + P_D(T) \cdot P_{NH} \cdot RR \cdot e^{-\overline{y}(T)T},$$

takže

$$P_{NH}e^{-y(T)T} = (1 - P_D(T))P_{NH}e^{-\overline{y}(T)T} + P_D(T) \cdot P_{NH} \cdot RR \cdot e^{-\overline{y}(T)T},$$

což dává

$$P_D(T) = \frac{1 - e^{-(y(T)-\overline{y}(T))T}}{1 - RR}.$$

2.4.4 Kreditní migrace a korelace

Již jsme se zmínili o tom, že kreditní riziko není pouze rizikem selhání protistrany, ale také změna ratingu protistrany. Za určité období mají některé CP tendenci měnit svůj rating. To se nazývá migrace kreditních ratingů (angl. credit ratings migration). Z historických dat se, např. pomocí Markovovských řetězců (Definice 10), vytvoří přechodová matice ratingů (Definice 12) , jejíž složky jsou pravděpodobnosti přechodu (Definice 11) z jedné kategorie do jiné za dané období. Obvykle se pro potřeby měření kreditního rizika používá perioda jeden rok.

Termín korelace defaultu se používá k popsání vzájemné závislosti selhání dvou společností v nějakém dostatečně krátkém intervalu. Existuje spousta důvodů, proč tato korelace není nulová. Společnosti mohou podnikat ve stejném odvětví, ve stejném regionu, mohou být stejně zasaženy nějakou mimořádnou událostí.

Předpokládejme dvě společnosti X a Y. Ratingové agentury obvykle počítají korelační koeficient takto

$$\rho_{X,Y}(t) = \frac{P_{X,Y}(t) - P_X(t)P_Y(t)}{\sqrt{[P_X(t) - P_X(t)^2][P_Y(t) - P_Y(t)^2]}}, \tag{2.4.2}$$

kde $P_{X,Y}(t)$ je sdružená pravděpodobnost toho, že X a Y selžou v čase $t = 0, \ldots, T$ a $P_X(t)$ je pravděpodobnost selhání společnosti X v čase t, analogicky pro společnost Y. Funkce $\rho_{X,Y}$ je závislá na čase a obvykle se korelační koeficient s přibývajícím časem zvyšuje.

Další metoda měření korelačního koeficientu využívá pravděpodobnostního rozdělení doby do selhání. Předpokládejme t_X a t_Y jsou doby do selhání společností X a Y. Proměnné t_X a t_Y nemají normální rozdělení. Nicméně

$$z_X(t_X) = \Phi^{-1}[P_X(t_X)] \quad \text{a} \quad z_Y(t_Y) = \Phi^{-1}[P_Y(t_Y)]$$

jsou funkcemi t_X a t_Y, které už mají normální rozdělení. V tomto případě předpokládáme, že $z_X(t_X)$ a $z_Y(t_Y)$ mají dvojrozměrné normální rozdělení. Takže sdružené pravděpodobnostní rozdělení dob do selhání lze vyjádřit pravděpodobnostním rozdělením $P_X(t_X)$ proměnné t_X, pravděpodobnostním rozdělením $P_Y(t_Y)$ proměnné t_Y a korelačního koeficientu mezi $\rho_{X,Y}(t_X, t_Y)$. Tento předpoklad nás vede k používání tzv. Gaussovské kopule.

Gaussovská kopule může být rozšířena na libovolně konečně velké množství společností. Předpokládejme k společností a t_i je doba do selhání i-té společnosti. Definujme $P_i(t_i)$ jako pravděpodobnostní rozdělení t_i a

$$z_i(t_i) = \Phi^{-1}[P_i(t_i)], \tag{2.4.3}$$

pro $1 \leq i \leq k$ a předpokládáme, že $z_i(t_i)$ mají mnohorozměrné normální rozdělení. Přístup Gaussovské kopule je velmi užitečný způsob jak reprezentovat korelační strukturu mezi proměnnými, které nejsou normálně rozdělené. Umožňuje oddělený odhad korelací proměnných z jejich marginálních rozdělení. Ačkoliv jednotlivé proměnné nemají mnohorozměrné normální rozdělení, jejich transformace normálně rozdělené jsou.

2.5 Nejznámější metody měření kreditního VaR

2.5.1 CreditMetrics

V roce 1997 vyvinula banka J.P. Morgan metodu zvanou CreditMetrics pro výpočet kreditního VaR. Tato práce vyšla rok poté, co J.P. Morgan uvedl svou první stěžejní práci o výpočtu tržního VaR zvanou RiskMetrics. Tento model patří do kategorie mark-to-market, což znamená, že nerozdělujeme stav protistrany pouze na selhal-neselhal, ale za určité období zjišťujeme, v jaké ratingové kategorii se dlužník nachází, např. i v Defaultu. CreditMetrics zahrnuje odhad pravděpodobnostního rozdělení kreditních ztrát simulováním změn kreditních ratingů pro každou protistranu. Předpokládejme, že chceme stanovit pravděpodobnostní rozdělení ztrát během jednoho roku. Při každé simulaci stanovujeme změnu kreditního ratingu protistrany a také změny tržních proměnných. Přeceňujeme naše nezaplacené pohledávky při stanovení celkových kreditních ztrát ze selhání a změn kreditního ratingu.

Tento přístup je mnohem komplikovanější než CreditRisk+, který modeluje pouze okamžiky selhání. CreditMetrics může sledovat změny kreditního ratingu během kratšího období, např. měsíc, což usnadňuje zpřesněný přehled o potenciálních kreditních ztrátách za celý rok a poskytuje lepší informovanost o protistraně. Můžeme zahrnout podmínku, že ztráta nastane pouze když se protistrana dostane ze svého stávajícího ratingu, např. A, přímo na Default.

Pro stanovení kreditních ztrát, kreditních změn pro různé protistrany, bychom neměli předpokládat vzájemnou nezávislost. CreditMetrics využívá Gaussovské kopule k modelování změn ratingů mnoha různých protistran. Vyžadujeme předpoklad, že korelace mezi dvěma normálními náhodnými proměnnými odpovídající dvěma protistranám je stejná, jako korelace mezi cenami jejich akcií.

V případě portfolia dvou nebo více obligací pro analytický výpočet směrodatné odchylky stačí znát pravděpodobnostní tabulku společných migrací. Pravděpodobnosti společných migrací lze určit na základě historické tabelace, historických tržních spreadů a nebo na základě opčního modelu kreditního rizika spolu s historickými daty.

Credit at Risk

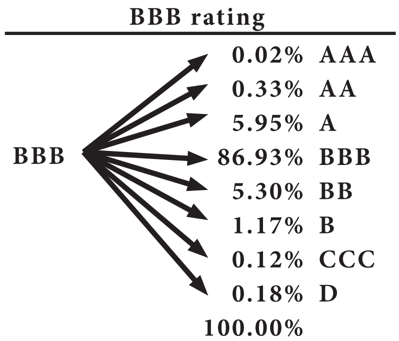
CreditMetrics je komplexní přístup k odhadování Credit at Risk (dále jen CaR). Odhad CaR je aplikací míry VaR na odhad kreditního rizika. Asymetrické pravděpodobnostní rozdělení zisků a ztrát je důsledkem existence kreditního rizika. Asymetrie je způsobena tím, že pravděpodobnost změny ratingu protistrany vykazující ztrátu je mnohem větší, než pravděpobnost změny ratingu vykazující zisk. A proto je normální rozdělení ještě méně informativní (méně použitelné), než tomu bylo u tržního rizika. Takže metoda variance a kovariance pro kreditní riziko

$$\mathrm{CaR}_{t,\alpha} = u_\alpha \sigma_t P_0 \tag{2.5.1}$$

je jen hrubým odhadem opravdového rizika, kterému je banka vystavena.

Nyní si rozebereme postup, jakým CreditMetrics odhaduje CaR pro jednu obligaci.

1. V našem modelu vzniká riziko nejen ze selhání, ale i ze změny kreditního ratingu. Proto si nejdříve určíme pravděpodobnost selhání i různé pravděpodobnosti migrace do jiných ratingových kategorií. Např. pro obligaci s ratingem BBB.



Obrázek 2.4: Migrace obligace BBB[2]

2. V prvním kroku jsme si určili pravděpodobnosti migrace. V dalším kroku určíme procento z celkové částky, které bude věřiteli vyplaceno

[2] Obrázek 2.4 je převzat z [12].

v případě defaultu. To znamená, že ohodnotíme klienta na základě různých podkladů, jak už bylo zmíněno. CreditMetrics nabízí 5 možných kategorií ohodnocení klienta podle jejich závislosti na defaultu - Senior Secured, Senior Unsecured, Senior Subordinated, Subordinated, Junior Subordinated.

3. Dále vypočítáme tabulku alternativních hodnot pro sestup (resp. vzestup) na jiný ratingový stupeň. Tabulka nám říká, jaká by byla cena obligace, kdyby změnila svůj rating na jiný. Při výpočtu těchto cen se používají nulové sazby bekupónových obligací, které jsou kategorizovány dle splatnosti a ratingu.

4. Nyní máme všechny informace, které jsme potřebovali znát k odhadu volatility. Známe-li cenu obligace pro každý rating a pravděpodobnost migrace každého ratingu, pak můžeme použít výpočet střední hodnoty ceny obligace vzhledem k různým scénářům (v našem případě 8 scénářů)

$$E[S] = p_{AAA}S_{AAA} + \cdots + p_{CCC}S_{CCC} + p_D S_D, \tag{2.5.2}$$

kde p_i je pravděpodobnost změny ratingu na rating i a S_i je cena obligace při získání ratingu i. A rozptyl tohoto rozdělení

$$\sigma^2(S) = \sum_{rating} S^2_{rating} p_{rating} - \left(\sum_{rating} S_{rating} p_{rating} \right)^2, \tag{2.5.3}$$

potom můžeme CaR odhadnout jako

$$\mathrm{CaR}_{t,\alpha} = u_\alpha \sigma_t S_0, \tag{2.5.4}$$

kde S_0 je počáteční hodnota.

Výše uvedený postup je pouze pro jednu obligaci, nyní budeme předpokládat portfolio o dvou obligacích.

1. Stejně jako u portfolia o jedné obligaci si sestrojíme tabulku migrace, ale tentokrát zde budou sdružené migrační pravděpodobnosti. Z definice nezávislosti náhodných veličin plyne, že pokud jsou dvě náhodné veličiny nezávislé, potom se sdružené pravděpodobnosti rovnají součinu pravděpodobností marginálních. Pokud jsou tyto veličiny korelované, potom CreditMetrics užívá techniku dělících bodů. Pokud nejsou korelované, můžeme se sdruženými pravděpodobnostmi, které známe, postupovat jako v případě pro jednu obligaci. Střední hodnotu vypočítáme jako

$$E[X+Y] = p_{A,A}(X_A+Y_A)+p_{A,BBB}(X_A+Y_{BBB})+\cdots+p_{D,D}(X_D+Y_D),$$

kde $p_{i,j}$ je sdružená pravděpodobnost s ratingem i pro cenu X a ratingem j pro cenu Y. Pro i ratingů je tedy i^2 sčítanců. Obdobně pro rozptyl platí

$$\sigma^2(X+Y) = E[(X+Y)^2] - (E[X+Y])^2.$$

CaR odhadneme jako

$$\mathrm{CaR}_{t,\alpha} = u_\alpha \sigma_t (X_0 + Y_0). \tag{2.5.5}$$

2. Předpokládejme, že se změní tržní hodnota aktiv protistrany (emitenta), potom se změní rating protistrany. Čím vyšší (resp.nižší) je hodnota aktiv, tím lepší (resp. horší) rating. CreditMetrics vychází z pásem pro hodnotu aktiv určující rating S&P, které odpovídají statistickým pravděpodobnostem změn ratingu. Přesněji řečeno, je-li σ směrodatná odchylka (roční) změny hodnoty aktiv podniku s ratingem např. BB, je dáno jaká změna R_A hodnoty aktiv vyjádřená jako násobek σ způsobí zhoršení nebo zlepšení ratingu. Označme si jednotlivá pásma jako $Z = (Z_{AAA}, Z_{AA}, \ldots, Z_D)$, která mají následující vlastnosti

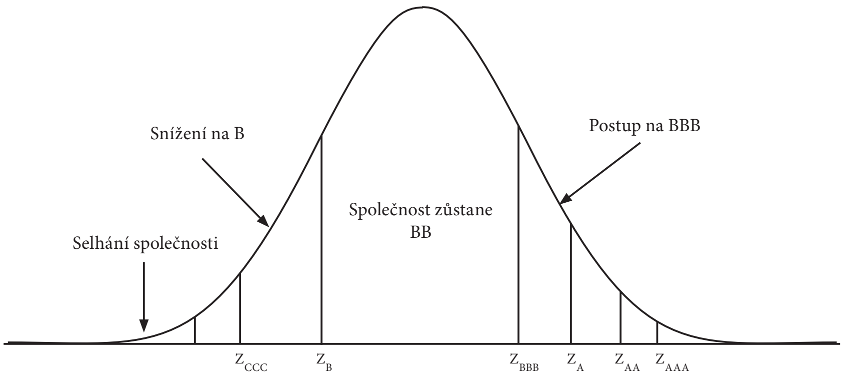
$$\begin{aligned} R_A < Z_D &\;\Rightarrow\; \text{selhání protistrany} \\ &\;\vdots \\ Z_{AA} < R_A < Z_{AAA} &\;\Rightarrow\; \text{změna ratingu na AA} \\ Z_{AAA} < R_A &\;\Rightarrow\; \text{zvýšení ratingu na AAA.} \end{aligned}$$

Dále nechť pravděpodobnosti, se kterou nastanou změny ratingu jsou popsány výběrovými pravděpodobnostmi $P = (P_{AAA}, P_{AA}, \ldots, P_D)$. Symbolicky zapíšeme

$$\begin{aligned} P_D &= P\left(\frac{Z_D}{\sigma} > \frac{R_A}{\sigma}\right), \\ &\vdots \\ P_{AA} &= P\left(\frac{Z_{AA}}{\sigma} < \frac{R_A}{\sigma} < \frac{Z_{AAA}}{\sigma}\right), \\ P_{AAA} &= P\left(\frac{Z_{AAA}}{\sigma} < \frac{R_A}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

podle definice distribuční funkce a označení distribuční funkce normálního rozdělení můžeme psát

$$\begin{aligned} P_D &= \Phi\left(\frac{Z_D}{\sigma}\right), \\ &\vdots \\ P_{AA} &= \Phi\left(\frac{Z_A}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Z_{AA}}{\sigma}\right), \\ P_{AAA} &= 1 - \Phi\left(\frac{Z_{AAA}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$



Obrázek 2.5: Rozdělení výnosů s dělícími body.

Zde si můžeme povšimnout, že pro změnu ratingu je určující tzv. standartizovaná změna $\frac{R_A}{\sigma} \sim N(0,1)$. Ty jsou odvozeny z tabulky migračních pravděpodobností. Pro více protistran je třeba znát pouze korelace změn jejich aktiv, stejné korelace mají totiž standardizované změny, jejichž směrodatné odchylky jsou rovny 1.

3. Již jsme zmínili, že pro více protistran je třeba znát korelace. Tu nemůžeme odhadnout přímo z pozorovaných dat. Korelace můžeme odhadnout na základě tržní hodnoty aktiv protistrany, např. cen akcií nebo pomocí jednoho či více sektorových indexů.

   Známe-li tedy výchozí rating všech protistran z našeho portfolia, korelace ročních změn jejich aktiv, migrační tabulku, potom pravděpodobnostní rozdělení lze již jednoduše určit pomocí simulace Monte Carlo, popř. analytickým odhadem. Při simulaci nejprve generujeme možné budoucí standardizované změny hodnoty aktiv našich protistran. Přitom vycházíme z daných korelací. V každém scénáři pak určíme rating všech protistran a hodnotu našeho portfolia. Omezit shora počet scénářů, které je počítač schopen generovat, je při rychlém vývoji techniky těžké, ale předpokládejme, že v řádu 10^7. Na základě těchto výpočtů sestavíme histogram a odečteme požadované parametry - střední hodnotu, směrodatnou odchylku, kvantily, VaR,. . .

   V praxi je zapotřebí uvažovat portfolio o obecně o N obligacích, kde $N \geq 2$. Tento problém se dá vyřešit pomocí transformace na problém portfolií o dvou složkách, který je rozebrán v [3].

2.5.2 CreditRisk+

Druhý přístup je založen na metodologii navrhnuté bankou Credit Suisse Financial Products v roce 1997 a byl pojmenován CreditRisk+ (také Credit Risk Plus). Tento přístup využívá postupy zavedené v pojišťovnictví (např.

bonusové a malusové systémy v pojištění automobilů). Je to model spadající do kategorie default-mode.

Předpokládejme, že banka, nebo finanční instituce, má N protistran určitého typu a pravděpodobnost jejich selhání je p v čase T. Předpokládaný počet selhání celého portfolia je $\vartheta = N \cdot p$. Dále předpokládejme, že selhání jsou nezávislé a $p << 1$. Pravděpodobnost k selhání je dána hustotou Poissonova rozdělení s parametrem ϑ jako

$$P(N = k) = \frac{e^{-\vartheta}\vartheta^k}{k!}. \tag{2.5.6}$$

To můžeme ještě spojit s pravděpodobnostním rozdělením minulých ztrát na jednotlivých dlužnících, abychom obdrželi pravděpodobnostní rozdělení veškerých ztrát ze selhání. K zpřesnění odhadu pravděpodobnostního rozdělení ztrát z jednotlivých selhání můžeme ještě zahrnout pravděpodobnostní rozdělení kreditní expozice a přizpůsobit vzhledem k historickým recovery rates.

Pokud jsou splněny tyto předpoklady, potom může být pravděpodobnostní rozdělení celkových ztrát analyticky spočteno. Pro zavedení obecnějších předpokladů můžeme k výpočtu využít již zmíněnou metodu Monte Carlo u tržního VaR.

V praxi je pro banku nezbytné posuzovat několik kategorií protistran. Takže analýza pradvěpodobnostních rozdělení se musí aplikovat na každou kategorii zvlášť a výsledky se potom sloučí. Tím dostaneme celkovou ztrátu portfolia.

Problém spočívá v tom, že kreditní VaR se narozdíl od tržního měří jednou za rok. To implikuje velkou změnu v default rates, která mezi roky 1979 a 1990 činila více jak 3% (uvedeno v [8]).

2.5.3 KMV

S modelem KMV přišla společnost KMV Corporation. KMV také patří do skupiny modelů default-mode, což znamená, že kreditní riziko plyne přímo ze selhání. Pravděpodobnost selhání je spojena se strukturou aktiv a pasiv protistrany. Od ostatních modelů se KMV liší tím, že neodhaduje ekonomický kapitál pomocí VaR, ale na základě analýz. Zásadním pojmem KMV je očekávaná frekvence selhání (angl. expected default frequency), což je pravděpodobnost selhání jednotlivých protistran. Pro odhadnutí této frekvence je zapotřebí odhadnout bod selhání, který je dán součtem krátkodobých a poloviny dlouhodobých dluhů. Pokud se protistrana udrží nad touto hranicí, nedochází k selhání. Bod selhání se dá také definovat jako kvantil. KMV odhaduje vzdálenost od bodu selhání, která se rovná rozdílu mezi očekávanou hodnotou aktiva a hodnotou při které došlo k selhání. Což můžeme statisticky interpretovat jako rozdíl mezi střední hodnotou a kvantilem. Na základě mnoha historických dat je určen vztah mezi vzdáleností do selhání a očekávanou frekvencí selhání. KMV také určí očekávanou současnou hodnotu peněžních toků pro jednotlivá aktiva, korelaci výnosnosti aktiv a odhad rozdělení ztrát, ze kterého spočítá kreditní riziko zadaného portfolia.

2.6 Riziko a kapitálová přiměřenost

2.6.1 Basel I

Basilejská komise připravila první verzi návrhu Smlouvy o kapitálové přiměřenosti již v prosinci 1987. Byl to výsledek dlouholeté spolupráce s centrálními bankami zemí G10. V červenci 1988 byla vydána konečná verze *Basel I*[1]. Smlouva měla platnost již od svého vydání, přičemž všechna pravidla a požadavky měly být zavedeny do roku 1992 (tzv. ,,přechodné období“). Důvodem vytvoření pravidel pro minimální kapitál banky byla zmíněná snaha zvýšit spolehlivost a rovnováhu mezinárodního bankovního systému. Dalším důvodem bylo rovné podnikání se stejnými podmínkami pro všechny banky. Basel I měl být použitelný pro banky v zemích celého světa a zároveň měla být pravidla v různých zemích konzistentní a neumožňovat velké konkurenční nerovnosti mezi jednotlivými bankami. Požadavky Basilejské smlouvy se týkají především bank v členských zemích Basilejské komise. Nyní platí i pro země EU, která Baselu I využila ve své direktivě.

Smlouva z roku 1988 vyžaduje od mezinárodně aktivních bank zemí G10, aby udržely kapitál minimálně na 8% celkových aktiv měřených různými způsoby vzhledem k jejich rizikovosti (RWA) - tzv. kapitálová přiměřenost (CAD).

$$CAD = \frac{Kapitál}{RWA} \geq 8\% \tag{2.6.1}$$

Definice kapitálu je stanovena (obecně) dvěma vrstvami (angl. tiers). Tier 1 je vlastní kapitál akcionářů a zadržené příjmy. Tier 2 jsou dodatečné vnitřní a vnější zdroje dostupné bance. Banka musí udržet alespoň polovinu měřeného kapitálu v Tier 1 (minimálně tedy 4%).

Basel I ještě nekategorizuje pohledávky podle externích ratingů, které zavádí až pokročilejší Basel II. Basel I přiřazuje rizikové váhy jednodušeji, např. podniky, banky, ale i země různých skupin.

Již zmíněný minimální kapitál je hranicí, pod kterou nesmí kapitál banky za žádných okolností klesnout. Očekává se, že banky budou udržovat vyšší než požadovanou hladinu kapitálu, aby se vyhnuly náhlému navyšování za nepříznivého vývoje rizikového profilu banky. Basel I ponechává regulátorům

[1] celým názvem "International Convergence of Capital Measurements and Capital Standards"

pravomoc požadovat vyšší kapitál, pokud dojdou k závěru, že tomu rizikový profil banky odpovídá.

K zásadní úpravě v Basel I došlo v roce 1996, kdy byla vydána konečná verze dodatku[2]. Na základě tohoto dodatku byly obchodní aktivity banky vyjmuty z kreditního rizika a byl pro ně vytvořen speciální kapitálový požadavek. Basilejská komise se snažila zohlednit odlišnost mezi kreditním a tržním rizikem a lépe tak propojit kapitálový požadavek se skutečným rizikem banky. Banky toto musely zavést do konce roku 1997.

Tržní riziko bylo v dodatku zadefinováno jako riziko ztráty v rozvahových i podrozvahových pozicích z důvodu pohybu tržních cen. Upravený kapitálový požadavek tak pokrývá zejména obchody s finančními instrumenty, které jsou vázané na úrokové sazby, obchody s CP aj. Rizikovost banky je hodnocena na základě velikosti otevřených pozic v těchto instrumentech.

Tento dodatek umožnil bankám k výpočtu kapitálové přiměřenosti použít své vnitřní přístupy. Vytvoření tohoto dodatku je prvním momentem v historii výpočtu kapitálové přiměřenosti, kdy je bankám dána možnost využít své interní přístupy. Na rozdíl od kreditního rizika, kde je způsob výpočtu kapitálového požadavku striktně nadefinován Basilejskou komisí. U tržního rizika je bankám ponechána možnost si zvolit mezi dvěma metodami.

Standardizovaná metoda používá podobný přístup jako u kreditního rizika.

Pokročilá metoda umožňuje bankám využívat své výpočty a modely. Banky musejí splnit řadu požadavků na kvalitu těchto modelů i na vyspělost řízení rizik. Interní modely jsou většinou založeny na metodě VaR.

Vzhledem k rychlému vývoji se Basel I dostal do konfliktu se sofistikovanějšími způsoby výpočtů a modelování rizik. Hlavními faktory ve vývoji rizika bank jsou především rostoucí nabídka poskytovaných produktů a služeb, komplexita finančních transakcí, propojenost bankovního sektoru a nové metody řízení všech druhů rizik. V okamžiku, kdy se tyto okolnosti staly nedílnou součástí bankovního prostředí, výpočet kapitálového požadavku nejjednodušší metodou rizikově vážených aktiv se stal velmi nepřesným odhadem skutečného rizika banky. Tyto nepřesnosti jsou také způsobeny tím, že Basel I pokrývá hlavně kreditní riziko, které je pro banku dominantní, takže se předpokládalo, že prostředky na pokrytí kreditního rizika pokryjí i všechna ostatní rizika. Ta se ale v budoucnu ukázala být velmi významnými. Další problém spojený s vývojem řízení rizik v čase je nízká motivace ke zlepšování řízení veškerých rizik, vývoji svých interních systémů. Začal se také prohlubovat rozdíl mezi ekonomickým a regulatorním kapitálem.

[2]v celém znění "Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks"

2.6.2 Basel II

Cíle nové smlouvy *Basel II* - jak je navrhnuto Basilejskou komisí - jsou:

- Podpora ochrany a spolehlivosti finančního sytému
- Zvýšit konkurenční rovnost
- Stanovit více komplexní přístup ke zmiňovaným rizikům
- Rozvinout přístupy ke kapitálové přiměřenosti, které jsou náležitě citlivé ke stupni příslušného rizika bankovních pozic a aktivit
- Zaměření se na mezinárodně aktivní banky a zároveň zachovat základní principy použitelné pro aplikaci na banky různých úrovní komplexnosti a informovanosti.

K dosažení těchto cílů Basel II měří kapitálovou přiměřenost následujícím vztahem:

$$CAD = \frac{\text{Kapitál}}{\text{Kreditní riziko} + \text{Tržní riziko} + \text{Operační riziko}} \tag{2.6.2}$$

s různými přístupy k měření jednotlivých rizik. Způsob, jakým je Basel II strukturován, se soustřeďuje na měření rizik, kterým banka čelí, a hodnocení pravděpodobnosti insolvence. Basel II představuje pokročilejší metody výpočtu kreditního rizika a kapitálový požadavek na operační riziko (např. riziko zkolabování počítačové sítě, podvody,...). V dnešní době mnoho bank alokuje 20% nebo i víc ze svého kapitálu právě na pokrytí tohoto rizika. V Basel II jsou váhy rizika předefinovány odkazem na rating připravený externí úvěrovou vyměřovací institucí (ratingová agentura), která vyhovuje přísným standardům, nebo spolehnutím se na interní pokročilé přístupy k metodám výpočtu (tzv. IRB přístupy), u kterých banky připravují vstupy pro váhy rizik.

Portfoliový přístup byl převzat měřením rizik, tzn. aktiva rozdělit do 4 skupin (0%, 20%, 50% a 100%) vzhledem ke kategorii protistrany (standartizovaný přístup).

Úvěr.kvalita	AAA do AA-	A+ do A-	BBB+ do BB-	Pod BB-	Neohodnoc.
Váhy rizika	20%	50%	100%	150%	100%

Tabulka 2.2: Rizikové váhy pro podnikové expozice

To znamená, že nějaká aktiva (v podstatě banky držící vládní aktiva jako pokladniční poukázky - T-Bills a dluhopisy) nemají kapitálové požadavky.

IRB přístup (Internal Ratings Based Approach), jak plyne z názvu, je systém ratingu, který si interně banka vypracuje pod dohledem regulátora.

Předpis výpočtu IRB je vytvořen pro portfolia půjček velkých mezinárodních bank. Banka rozdělí svá aktiva do 14 různých tříd a aplikuje výpočet IRB na 13 z nich (všechny kromě kmenových akcií). Banky dále rozdělí tyto třídy podle ratingu dlužníků, ale musejí regulátorům prokázat, že jejich postupy jsou dostatečně robustní. Pro každý rating si banka připraví klíčové proměnné, které pak dosadí do rovnice výpočtu IRB. Zjednodušeně můžeme tuto rovnici zapsat jako

$$CAD_{IRB} = LGD \cdot CAD_V \cdot M, \tag{2.6.3}$$

kde LGD je míra ztráty při selhání - podíl ztracených aktiv při selhání (angl. Loss Given Default). M je upravená průměrná splatnost půjčky a CAD_V je celkový požadovaný kapitál v podobě procenta z aktiv stanovený tzv. *Vašíčkovou formulí* definovanou jako

$$CAD_V = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(P_D) + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\rho_V}}{\sqrt{1-\rho_V}}\right), \tag{2.6.4}$$

kde α je hladina spolehlivosti, P_D je pravděpodobnost selhání a ρ_V je korelace výnosů aktiv dlužníků v portfoliu. Vašíčkova formule určuje hladinu kapitálu tak, aby byla banka chráněna před bankrotem v jednom roce s pravděpodobností bankrotu ne více než $(1-\alpha)$. Regulátoři stanovují hladinu spolehlivosti $\alpha = 99.9\%$ pro pokročilé IRB přístupy. IRB přístupy využívají princip Gaussovské kopule (podobně jako CreditMetrics), který jsme si zavedli v rovnici (2.4.3). Výpočet M z rovnice (2.6.3) lze najít v [7] a více o úvěrových modelech v [9].

Basel II se skládá ze tří pilířu:

1. Minimální kapitálové požadavky

2. Proces dohledu

3. Transparentnost a tržní disciplína

Dohromady tyto tři pilíře přispívají k vyšší úrovni zabezpečení a spolehlivosti finančního systému.

První pilíř

Definice kapitálu v Basel II se nezměnila a minimální kapitálový požadavek (viz rovnice (2.6.1)) zahrnující operační a tržní riziko (viz rovnice (2.6.2)) zůstává 8% vzhledem k celkovému kapitálu. Kapitál Tier 2 je stále limitován do 100% kapitálu Tier 1. Hlavní změny přicházejí ze zahrnutí operačního rizika a přístupy k měření různých druhů rizik. Operační riziko v kapitálové přiměřenosti je rozebráno v [13]. Následující výčet shrnuje tyto přístupy:

Kapitál :	Nezměněn
Kreditní riziko :	Standartizovaný přístup (modifikace existujícího způsobu) Základní interní přístupy (IRB) Pokročilé interní přístupy (IRB)
Tržní riziko :	Standartizovaný přístup Modely vnitřních přístupů
Operační riziko :	Přístup základního ukazatele Standartizovaný přístup Přístup vnitřních měření

Hlavním cílem je vytvořit standardizovaný přístup, který v průměru minimální kapitál mezinárodně aktivních bank nesníží ani nezvýší. U pokročilejších metod je cílem zajistit minimální kapitál na pokrytí rizik a poskytnutí bankám kapitálové podněty ve srovnání se standardizovaným přístupem (více k výpočtům kapitálové přiměřenosti v [2]). Basel II přináší změny i do stanovení kapitálového požadavku pro kreditní riziko. Nabízí použití interních ratingů banky a použití portfoliových modelů kreditních rizik. Banka si může vybrat, zda bude svůj kapitálový požadavek určovat standardizovanou metodu nebo základní a pokročilou metodou interních ratingů podle svých technických možností, ale její výběr bude posuzovat regulátor. Veškeré zmíněné metody by měly klást důraz na kvalitu řízení rizik banky a na metody snižování rizika.

Druhý pilíř

Druhým pilířem Basel II je dohled nad celkovou kapitálovou přiměřeností a to zejména u mezinárodně aktivních bank. Na základě prvního pilíře si banka vypočte svůj požadovaný minimální kapitál, zatímco předmětem druhého pilíře je dohled regulátora, zda tento kapitál byl stanoven ve výši, která je odpovídající skutečnému rizikovému profilu banky. Bude posuzována robustnost postupů použité bankou, kvalita interních procesů, stabilita tržního prostředí, práce interních a externích auditorů, kvalita oddělení řízení rizik a další faktory mající vliv na celkový rizikový profil banky.

Většina bank měří svá rizika pomocí metodologie VaR. V Tabulce 2.1 si můžeme povšimnout, že hladiny spolehlivosti jednotlivých institucí se liší. A proto mají regulátoři pravomoc vynásobit bankou vypočítaný VaR konstantou 3 nebo 4.

V Basel II si banky můžou vybrat z nabídky přístupů měření kreditního, tržního a operačního rizika. Tento proces výběru přístupu vyžaduje dohled dostupnosti minimálních požadavků k zavedení vybraného přístupu. Navíc k tomu v IRB přístupech jsou rizikové váhy vypočítány ze vstupů banky (např. pravděpodobnost nesplacení). V případě nutnosti je zapotřebí se přesvědčit, zda bankovní vstupy jsou měřeny nebo odhadovány správným a robustním způsobem.

Třetí pilíř

Třetím pilířem je transparentnost a tržní disciplína. Tímto pilířem jsou na banky kladeny nároky na transparentnost podnikání a zveřejňování informací. Komise spoléhá na to, že veřejnosti bude usnadněno povědomí o bezpečnosti a rizikovosti banky zveřejňováním více informací bankou. Finanční instituce tak budou nuceny udržet si natolik silnou kapitálovou základnu, aby ukázaly svoji schopnost pokrývat případnou ztrátu právě tímto kapitálem, aniž by tím způsobily zásadní dopad na stabilitu banky. Z tohoto důvodu chce Komise rozšířit spektrum informací, které budou banky povinné zveřejňovat, například o způsob výpočtu kapitálového požadavku. Ještě více informací bude požadováno od bank, které využívají vlastní pokročilé metody výpočtů.

Kapitola 3

Analytická část

V této části práce budeme analyzovat výhody, ale hlavně nevýhody VaR na reálných datech. U každé analyzované nevýhody je uvedeno i její potenciální řešení. Nejvýznamějším rozšířením VaR, které zde zadefinujeme a rozebreme, je CVaR, která jako alternativa VaR zahrnuje i málo pravděpodobné ztráty, a koherenci míry rizika.

3.1 Data

3.1.1 Vybrané burzovní indexy

Budeme uvažovat investora, který chce investovat $P = 90$ mil. CZK do CP vázaných na vývoj tří burzovních indexů - S&P 500 (v USD), Nikkei 225 (v JPY) a PX (v CZK). Dále má investor k dispozici časové řady 500 denních pozorování uzavíracích cen všech tří indexů - S&P 500 (27.4.2006 - 22.4.2008), Nikkei 225 (11.4.2006 - 22.4.2008), PX (21.4.2006 - 22.4.2008). Měnové kurzy k 22.4.2008 byly 1 USD = 15.243 CZK a 100 JPY = 15.730 CZK. CP, které obvykle kopírují vývoj indexu se nazývají *exchange-traded funds* (zkráceně ETFs). Údaje o časových řadách indexu S&P 500 a Nikkei 225 jsou z internetového serveru (`http://finance.yahoo.com`), kurz PX z internetového serveru Pražské burzy (`http://www.pse.cz`) a měnové kurzy ze serveru ČNB (`http://www.cnb.cz`). CP vázané na indexy budeme dále značit A_1 pro S&P 500, A_2 pro Nikkei 225 a A_3 pro PX.

3.1.2 Složení portfolia

Složení portfolia je uvedeno v následující tabulce, kde w_i jsou jednotlivé váhy CP v portfoliu a n_i je počet CP, $i = 1, 2, 3$.

CP	n_i	w_i	**částka v CZK**
A_1	5	$8 \cdot 10^{-6}$	100 tis.
A_2	2421	0.0422	5 mil.
A_3	54923	0.9577	84.9 mil.
celkem	57349	1	90 mil.

Tabulka 3.1: Složení porfolia

Vývoj časové řady portfolia zjistíme úpravou dle Definice 14. Investor chce odhadnout riziko portfolia mírou VaR. Je tedy zapotřebí ještě časové řady transformovat tak, abychom zjistili denní výnosy podle (2.3.20). Předpokládejme, že portfolio je kurzově zajištěné.

3.1.3 Nezávislost transformovaných dat

Pro budoucí výpočet VaR budeme potřebovat znát standartní odchylku výnosů, tedy i závislost (resp. nezávislost) mezi jednotlivými výnosy časových řad. Nezávislost můžeme ověřit výběrovou korelační maticí

$$\begin{array}{c|ccc} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_1 & 1 & 0.01102568 & 0.04371957 \\ A_2 & 0.01102568 & 1 & 0.04064497 \\ A_3 & 0.04371957 & 0.04064497 & 1 \end{array},$$

ze které vidíme, že největší závislost je mezi A_1 a A_3. Jelikož z výběrové korelační matice není nezávislost zřejmá, provedeme test nulovosti korelace, tzv. Pearsonův test(v programu R *Pearson's product-moment correlation*). Ve výstupu tohoto testu v programu R jsou: názvy zadaných dat (SP500, Nikkei225, PX), testová statistika (t), počet stupňů volnosti (df, v našem případě df = 497), p-hodnota (p-value, tj. nejmenší hodnota na které zamítáme nulovost korelace), alternativní hypotéza, 95% interval spolehlivosti a výběrový korelační koeficient, který je již uveden v korelační matici.

Test nezávislosti A_1 a A_2

```
data: SP500 and Nikkei225
t = 0.2458, df = 497, p-value = 0.806
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.07682716 0.09870863
sample estimates:
cor
0.01102568.
```

Už z výběrové korelační matice bylo vidět, že korelace mezi výnosy těchto dvou indexů je nejmenší a tomu také odpovídá p-hodnota, která je velmi vysoká (80.6%), takže nulovost na hladině spolehlivosti 99% nezamítáme.

<u>Test nezávislosti A_1 a A_3</u>

```
data: SP500 and PX
t = 0.9756, df = 497, p-value = 0.3297
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.04422865 0.13099534
sample estimates:
cor
0.04371957.
```

Zmínili jsme se o tom, že výběrová korelace výnosů těchto dvou indexů je nejvyšší ze všech, tomu odpovídá i nízká p-hodnota. Ale i přesto nulovost korelace nezamítáme na hladině spolehlivosti 99%.

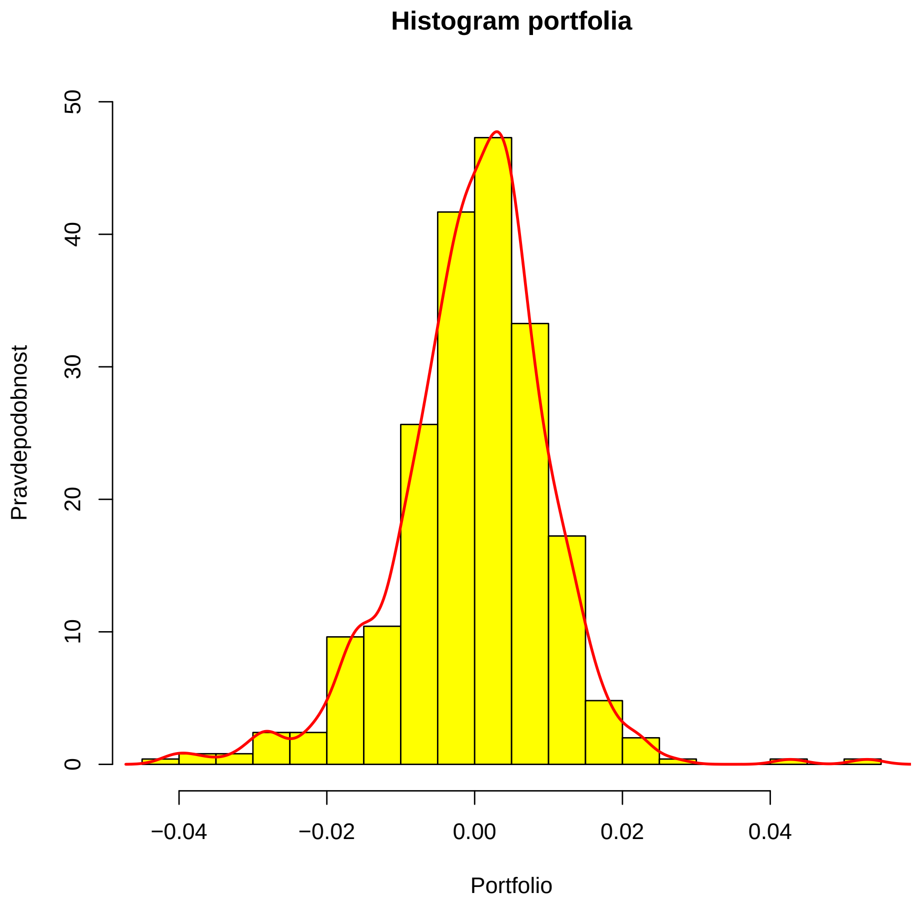
<u>Test nezávislosti A_2 a A_3</u>

```
data: Nikkei225 and PX
t = 0.9069, df = 497, p-value = 0.3649
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.04730228 0.12796690
sample estimates:
cor
0.04064497.
```

Zde je výběrový korelační koeficient blízký koeficientu z předchozího testu, tedy i p-hodnota je nízká, ale i tak je na dané hladině spolehlivosti dost vysoká. Můžeme konstatovat, že na základě testu výběrových korelačních koeficientů na hladině spolehlivosti 99% jsou výnosy časových řad indexů mezi sebou nezávislé.

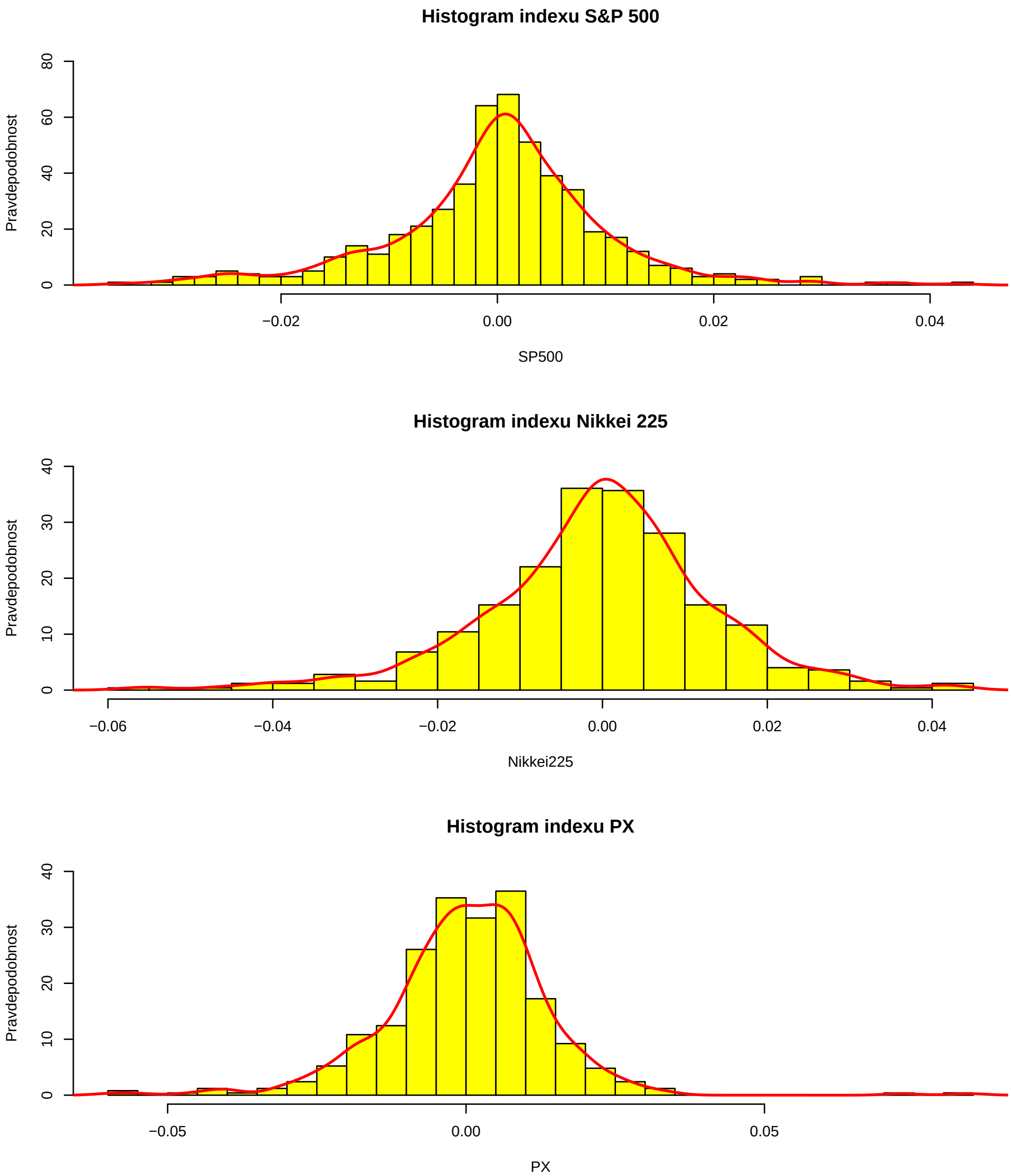
3.1.4 Rozdělení a normalita transformovaných dat

Výběrové rozdělení výnosů jednotlivých indexů a portfolia zjistíme na základě histogramu.



Obrázek 3.1: Výběrové rozdělení výnosů portfolia

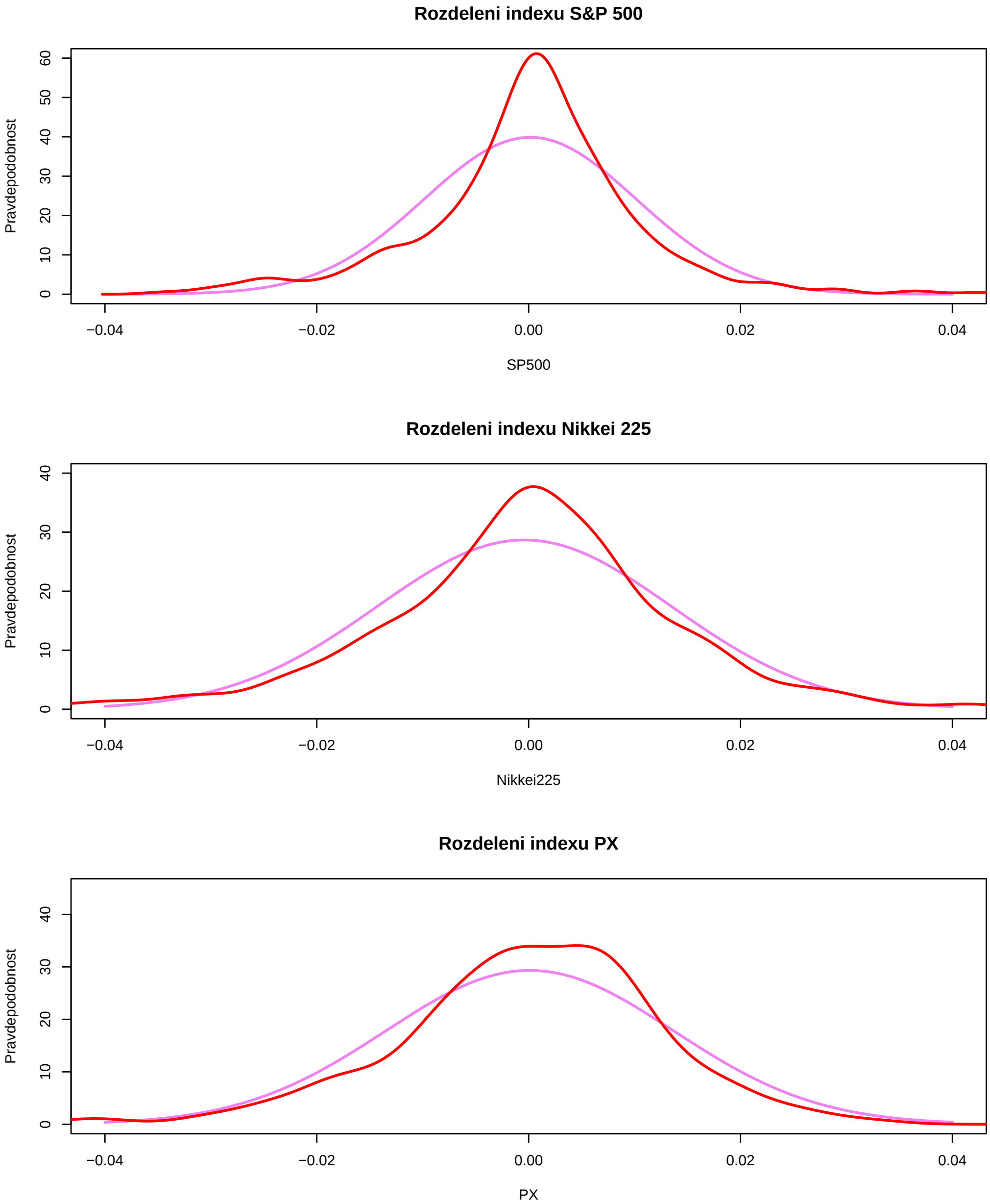
Na **Obrázku 3.1** si můžeme prohlédnout histogram výnosů portfolia, který je proložen výběrovou hustotou.



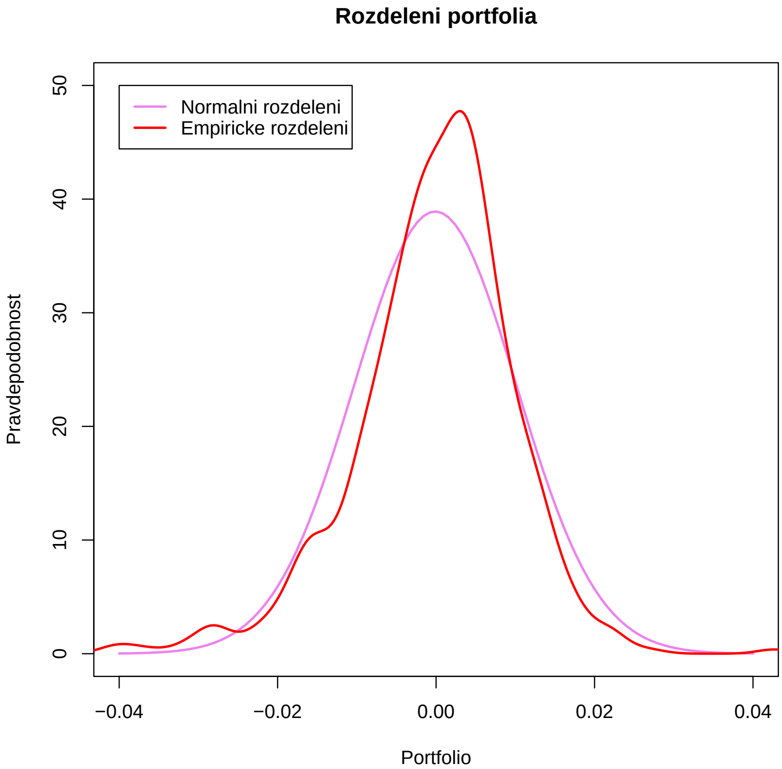
Obrázek 3.2: Výběrové rozdělení výnosů jednotlivých indexů

Nyní známe výběrové rozdělení celého portfolia, ale potřebujeme znát i výběrová rozdělení jednotlivých indexů, která jsou zobrazena na **Obrázku 3.2**.

Pro výpočet VaR metodou variance a kovariance (kapitola 2.3.1) je zapotřebí ověřit, zda mají výnosy indexů i portfolia normální rozdělení.



Obrázek 3.3: Hustota výnosů indexů a hustota normálního rozdělení



Obrázek 3.4: Hustota výnosů portfolia a hustota normálního rozdělení

Když se podíváme na **Obrázky 3.3** a **3.4**, mohlo by se zdát, že tato výběrová rozdělení jsou normální, ale není tomu tak. Normalitu ověříme v programu R jednovýběrovým Kolmogorovovým - Smirnovovým testem (*One-sample Kolmogorov-Smirnov test*), který porovnává výběrovou distribuční funkci, u které odhadneme střední hodnotu a rozptyl, s distribuční funkcí normálního rozdělení se stejným rozptylem a střední hodnotou. Výstup testu obsahuje název zadaných dat, testovou statistiku (D), p-hodnotu (p-value) a alternativní hypotézu.

Test normality A1

```
data: SP500
D = 0.0872, p-value = 0.001015
alternative hypothesis: two-sided
```

Podle p-hodnoty bychom museli uvažovat hladinu spolehlivosti 99.9% a vyšší, aby nebyla zamítnuta normalita. V tomto případě normalitu zamítáme.

Test normality A2

```
data: Nikkei225
D = 0.0635, p-value = 0.03582
alternative hypothesis: two-sided
```

Při výpočtu VaR metodou variance a kovarinace budeme hlavně předpokládat hladinu spolehlivosti 99%. Normalitu na této hladině spolehlivosti nezamítáme.

Test normality A3

```
data: PX
D = 0.0627, p-value = 0.03935
alternative hypothesis: two-sided
```

Tento test opět nulovou hypotézu na hladině spolehlivosti 99% nezamítá.

Test normality portfolia

```
data: Portfolio
D = 0.0608, p-value = 0.04985
alternative hypothesis: two-sided
```

Podle p-hodnoty bychom mohli uvažovat hladinu spolehlivosti 95.1% a vyšší pro nezamítnutí normality.

Dle všech výše uvedených testů není splněna normalita výnosů indexu S&P 500 na hladině spolehlivosti 99%, a proto není splněna ani sdružená normalita.

3.2 Výhody a nevýhody VaR

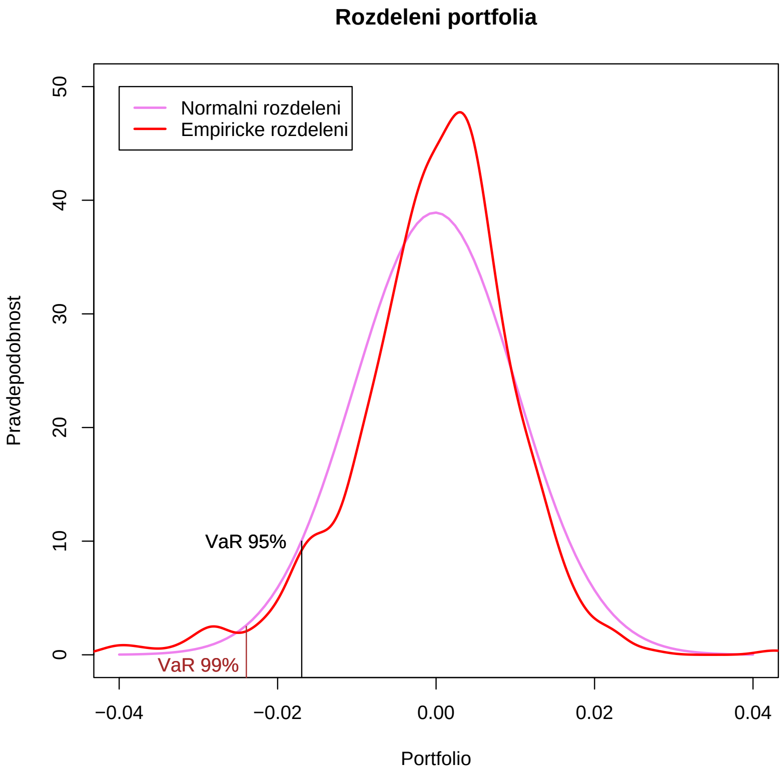
3.2.1 Celkové riziko a kapitálová přiměřenost

V průběhu této práce jsme si již zmínili, že ve výsledku je VaR pouze jedno číslo shrnující celkové riziko. VaR se od počátku devadesátých let rozšířil z tržního rizika i na rizika ostatní, jmenujme například kreditní riziko nebo operační riziko, které teprve začíná nabývat na důležitosti při řízení rizik banky i ostatních finančních institucí. VaR zahrnuje i výpočet rizika pro nelineární instrumenty jako jsou finanční deriváty či opce. Při splnění normality se výpočet VaR zjednodušuje na zjištění kvantilu normálního rozdělení.

VaR je povoleno použít pro interní výpočty kapitálové přiměřenosti banky pro tržní riziko. Banka si tak může řízení svých tržních rizik přizpůsobit ,,na míru". Užívání interního výpočtu je však povoleno pouze pro tržní riziko. Pro odhad kreditního rizika můžou banky v rámci kapitálové přiměřenosti používat pouze vlastní kreditní rating. Ale podle vývoje kapitálových požadavků můžeme do budoucna předpokládat, že regulátoři povolí i interní modely pro odhad kreditního rizika.

3.2.2 Málo pravděpodobné ztráty

Velkou nevýhodou VaR jsou málo pravděpodobné ztráty. To jest ztráty, které nastanou až za zvoleným kvantilem. Tyto ztráty mohou velmi významně převyšovat VaR, ale také způsobují to, že dvě banky s různým rizikovým profilem mají stejnou VaR, což může vést ke skrývání nebo umělému snižování skutečného rizika portfolia. Podobné chování bylo v historii zaznamenáno a vedlo k velmi nebezpečným a rizikovým strategiím. Proto mají regulátoři právo vynásobit VaR měřený na 99% hladině spolehlivosti konstantou 3 až 4. V našem příkladu bylo portfolio sestaveno úmyslně tak, aby vznikly málo pravděpodobné ztráty.



Obrázek 3.5: Kvantily normálního rozdělení

Na **Obrázku 3.5** jsou označeny 95% a 99% kvantil normálního rozdělení v porovnání s výběrovou hustotou. Při zmíněných těžkých chvostech můžeme normální rozdělení nahradit t-rozdělením, které má chvost těžší než normální rozdělení.

Nyní se vrátíme zpět k našemu příkladu, budeme počítat VaR na hladině spolehlivosti 99%. Metodou historické simulace je $\mathrm{VaR}_{1,0.99} = 2\,672\,501$ CZK, metodou variance a kovarince $\mathrm{VaR}_{1,0.99} = 2\,140\,613$ CZK. Metoda historické simulace nám poskytla reálnější odhad rizika a vidíme, že rozdíl v částkách není zanedbatelný, což je způsobeno hlavně tím, že nebyl splněn předpoklad sdružené normality.

Další mírou rizika je modifikace míry VaR tzv. *conditional* VaR (dále jen CVaR).

Definice 20 (CVaR) Conditional VaR na hladině $\alpha \in [0, 1]$, ozn. $\mathrm{CVaR}_{t,\alpha}$, odpovídající náhodné ztrátě X je zadefinován jako

$$\mathrm{CVaR}_{t,\alpha} = -E\left[X | X \leq -\mathrm{VaR}_{t,\alpha}(X)\right]. \tag{3.2.1}$$

Definice 20 definuje absolutní CVaR. Pro získání relativní CVaR musíme přičíst střední hodnotu.

Aplikujeme míru CVaR na portfolio investora vzhledem k VaR vypočítané pomocí historické simulace a metodou variance a kovariance. Následující tabulka je shrnutím výpočtu a porovnání metod výpočtu VaR a CVaR, ne však měr mezi sebou.

Metoda	$\mathbf{VaR_{1,0.99}}$	$\mathbf{CVaR_{1,0.99}}$
historická simulace	2 672 501 CZK	3 233 268 CZK
variančně-kovarianční	2 140 613 CZK	2 791 282 CZK
Rozdíl	531 888 CZK	441 986 CZK

Tabulka 3.2: VaR a CVaR portfolia

Na tomto příkladu můžeme vidět, že málo pravděpodobné ztráty jsou velkým kamenem úrazu VaR.

3.2.3 Subaditivita

Definice 21 (Koheretní míra) Nechť M je množina reálných náhodných veličin, pak funkci $\rho : M \to \mathbb{R}$ říkáme koherentní míra rizika, pokud splňuje následující vlastnosti

(i) $X, Y \in M,\ X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$,

(ii) $X, Y, X + Y \in M \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,

(iii) $X \in M, k \in \mathbb{R}^+, kX \in M \Rightarrow \rho(kX) = k\rho(X)$,

(iv) $X \in M, i \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + i) = \rho(X) - i$.

Pokud zisky a ztráty z portfolia nejdou popsat normálním, log-normálním nebo Studentovým t-rozdělením, potom není VaR subaditivní, nesplňuje (ii). To znamená, že diverzifikace rizik portfolia na součet rizik subportfolií neomezí celkové riziko. Subaditivita je jedním ze čtyř kritérií, který by měla splňovat koherentní míra rizika. Z toho plyne, že VaR obecně není koheretní mírou rizika. V tomto smyslu není VaR ,,správnou“ mírou rizika, protože odrazuje investora od diverzifikace svých rizik, což by ,,správná“ míra rizika neměla. Více o koheretních mírách lze najít v [1].

3.2.4 Statické portfolio

Na začátku u tržního VaR jsme zavedli předpoklad statického portfolia. Předpokládáme, že složení portfolia se během období, v kterém měříme VaR, nezmění. To může způsobit problémy např. obchodníkům, kteří během dne obchodují a ke konci dne odhadují VaR svých uzavřených pozic. Odhad VaR tak může podhodnocovat maximální ztrátu. Řešením tohoto problému je tzv. dynamický VaR, který simuluje scénáře pohybu tržních sazeb v závislosti na čase a podle toho pak upravuje jednotlivé pozice v portfoliu a vyhodnocuje vývoj portfolia.

3.2.5 Pohled do budoucna

„Odhadovat VaR je stejné jako sledovat cestu zpětným zrcátkem“, uvádí Kevin Dowd (viz [4]). Tento citát trefně vystihuje odhad VaR v praxi. I v našem příkladě investor vychází z historických časových řad. Předpokládáme, že při dostatečném množství historických údajů se rozdělení výnosů v budoucnosti bude chovat stejně jako v nedávné minulosti. Tento předpoklad je velmi silný, protože trh se neustále vyvíjí. Pokud nastane nějaká mimořádná událost (přírodní katastrofa, teroristický útok, politický převrat, finanční krize,...), není historické rozdělení výnosů použitelné. Pro ošetření těchto nepříznivých jevů je VaR doplněn testováním teoretických stresových situací (tzv. *stress testingem*) vytvořených např. na základě generování, pozic v portfoliu, nebo zkušeností.

3.3 Shrnutí výsledků

3.3.1 Doporučený postup pro investora

Podíváme-li se na výčet jednotlivých výhod a nevýhod VaR, vidíme, že náš výpočet byl velmi zjednodušující.

Investor měl portfolio kurzově zajištěné. Kdyby tomu tak nebylo, spočítali bychom měnovovou VaR. Vzhledem k tomu, že investované částky v cizí měně jsou výrazně menší než v CZK, nebyla by měnová VaR tak významná.

Dále jsme předpokládali statické portfolio, takže by investor měl udržovat neměnné portfolio, aby se odhadnuté riziko blížilo riziku skutečnému.

Veškeré výpočty výběrového rozdělení jsme provedli na základě časových řad, z toho plyne, že jakákoliv mimořáná situace by mohla maximální potenciální ztrátu výrazně ovlivnit.

Ověření normality nedopadlo dle očekávání a zaznamenali jsme málo pravděpodobnou ztrátu, tudíž nelze doporučit metodu variance a kovariance.

Odhad metodou historické simulace pokrývá, v našem konkrétním případě alespoň částečně, málo pravděpodobné ztráty. Proto by bylo bylo vhodnější doporučit investorovi výpočet pomocí míry CVaR vzhledem k VaR odhadnutou metodou historické simulace, která se nejvíce blíží reálnému riziku portfolia.

Kapitola 4

Závěr

Cílem této práce bylo popsat VaR jako celek. Rozebrali jsme statistické vlastnosti VaR a jednotlivé metody odhadu pro tržní i kreditní riziko. Zaměřili jsme se i na výpočet kapitálových požadavků, které striktně definují výpočet kreditního rizika narozdíl od rizika tržního, které je možné odhadovat vlastními výpočty.

Doplňkem teoretické části je příklad VaR pro tržní riziko, na kterém jsme demonstrovali výhody a hlavně nevýhody VaR, abychom si ucelili pohled na VaR. Ukázali jsme si, jaký význam má nezávislost a normalita výnosů. Při řešení příkladu se sice zabýváme výpočtem výběrových korelací, ale není zdůrazněna jejich důležitost. Korelace velmi významně ovlivňují VaR pro tržní riziko (viz [14]) i kreditní riziko (viz [12]).

Při práci s reálnými daty se nám většinou nepovede splnit veškeré předpoklady, tento příklad nebyl výjimkou. Konečný výpočet celkového rizika ukázal, že je zapotřebí rozšířit VaR na CVaR právě kvůli extrémním situacím, které nastávají.

Ačkoliv převažuje počet nevýhod oproti výhodám, stává se VaR stále oblíbenějším nástrojem v rukou risk managerů bank a finančních institucí.

Literatura

[1] Artzner P.: *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance (1999) **3** (9) 203–228.

[2] Cipra T.: *Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví*, Ekopress, Praha, 2002.

[3] Dědek O.: *Ohrožená hodnota*, Studijní text č. 2 k předmětu Řízení portfolia a finančních rizik, FSV UK, 2007.

[4] Dowd K.: *Beyond Value at Risk: the new science of risk management*, John Wiley & sons, Chichester, 1998.

[5] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publisher, 2002

[6] Glasserman P.: *Portfolio Value at Risk with heavy tailed risk factors*, Management science (2002) **3** (12) 239–269.

[7] Hugh T.,Wang Z.*Interpreting the Internal Ratings-Based Capital Requirements in Basel II*, working paper, Hong Kong, 2004

[8] Hull J.C.: *Options, futures and other derivatives*, 5th edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 2003.

[9] Kadlčáková N., Sůvová H.: *Přehled úvěrových modelů*, Bankovnictví 18.4.2002 strana 26, rubrika Měnová politika.

[10] Lachout P.: *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, Praha, 2004.

[11] Morgan J.P.: *RiskMetrics^{TM}-Technical document*, New York, 1996.

[12] Morgan J.P.: *CreditMetrics^{TM}-Technical document*, New York, 1997.

[13] Raková K.: *Operační riziko v Basilejské dohodě o kapitálové přiměřenosti*, diplomová práce, IES FSV UK, 2004.

[14] Strnad P.: *Měření tržních rizik pomocí metody Value at Risk*, časopis Ekonomie+Management **2** (2005).