

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

Fakulta financí a účetnictví

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jana Burešová

Oceňování derivátů pomocí Monte Carlo simulací

Katedra bankovníctví a pojišťovnictví

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

2009

Děkuji RNDr. Jiřímu Witzany, Ph.D. za konzultace poskytnuté i v době letních prázdnin a za cenné připomínky a podněty při zpracování mé diplomové práce.

Další poděkování patří trpělivým a nápomocným členům mé rodiny.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Praze dne 1.9.2009

Jana Burešová

Obsah

1	Úvod	5
2	Metody redukce rozptylu	8
2.1	Metoda Antithetic Variates	9
2.2	Metoda Moment Matching	12
2.3	Metoda Control Variates	14
2.4	Metoda Importance Sampling	16
2.5	Metoda Stratified Sampling	19
2.6	Metoda Latin Hypercube Sampling	26
3	Ocenění bariérové opce	30
3.1	Charakteristiky up-and-out call opce	30
3.2	Modely pro vývoj ceny podkladového aktiva	33
3.3	Diskretizace procesu	34
4	Implementace jednotlivých metod v modelu s konstantní vo-	
	latilitou	37
4.1	Metoda Antithetic Variates	37
4.2	Metoda Moment Matching	38
4.3	Metoda Control Variates	39
4.4	Metoda Importance Sampling	40
4.5	Metoda Stratified Sampling	42

4.6	Metoda Latin Hypercube Sampling	43
4.7	Srovnání metod	44
5	Implementace jednotlivých metod v modelu se stochastickou volatilitou	48
5.1	Metoda Antithetic Variates	49
5.2	Metoda Moment Matching	50
5.3	Metoda Control Variates	50
5.4	Metoda Importance Sampling	51
5.5	Srovnání metod	53
6	Závěr	55
	Seznam použité literatury	57

Kapitola 1

Úvod

Monte Carlo simulace, pojmenované podle místa s proslulým casinem, kde náhoda hraje důležitou roli, otevírají dveře pro řešení komplexních a těžkých, ale na druhou stranu praktických úloh. Spočívají v modelování tisíců možných budoucích scénářů pro vývoj čehokoli. Na základě představy o tom, v jaké míře, s jakou pravděpodobností a kdy co může nastat, jsme schopni vytvářet různé scénáře.

V historii byly například využívány pro stanovení hodnoty π či pro popsání vlastností nově objeveného neutronu. Dnes se s nimi můžeme běžně setkat v oblasti fyziky, chemie i financí. V poslední uvedené oblasti jsou pomocí Monte Carlo simulací mezi mnohými vypracovávány analýzy rizika nebo oceňovány finanční deriváty.

Důvod pro používání Monte Carlo simulací krásně popsal a okomentoval Johnathan Mun v úvodu k třetí části knihy [9]. Citovaný text ponecháváme v originálním jazyce. "An alternative to simulation is the use of highly complex stochastic closed-form mathematical models. For analysts in a company, taking graduate-level advanced math and statistics courses is just not logical or practical. A brilliant analyst would use all available tools at his or her disposal to obtain the same answer the easiest and most practical way

possible. And in all cases, when modeled correctly, Monte Carlo simulation provides similar answers to the more mathematically elegant methods. In addition, there are many real-life applications where closed-form models do not exist and the only recourse is to apply simulation methods.”

70. a 80. léta 20. století dala vzniknout množství finančních produktů, nazývaných finanční deriváty, které jsou svou povahou velmi různorodé. Ty složitější z nich jsou spojené s komplikovanou funkcí závislosti zisku/ztráty na ceně podkladového aktiva, a proto pro ně nelze obvykle odvodit analytický vzorec. Je třeba přistoupit k simulacím Monte Carlo. Dají se s nimi rovněž simulovat výplaty z jednodušších typů derivátů, pokud pro vývoj podkladového aktiva uvažujeme složitější stochastické procesy jako např. procesy s proměnlivou volatilitou či skokové procesy.

Nejčastěji se simulacemi snažíme získat odhad střední hodnoty náhodné veličiny (např. výplaty plynoucí z opce), jehož přesnost je závislá na jeho rozptylu. Možnosti pro snížení rozptylu odhadu jsou dvě, zvýšení počtu scénářů, ze kterých odhad počítáme, nebo vylepšení průběhu simulace. Pro Monte Carlo simulace platí obecná míra konvergence $1/\sqrt{n}$, tj. chceme-li docílit desetinásobného vylepšení odhadu, musíme jej získat ze stonásobku scénářů či pozorování. Jelikož platí, čím více scénářů, tím více času pro jejich získání, je otázka vylepšení průběhu simulace velmi podstatná.

V této práci se zaměříme na metody redukce rozptylu odhadů generovaných prostřednictvím Monte Carlo simulací a na jejich aplikaci. Druhá kapitola obsahuje teoretický popis šesti takových metod, které jsou zmiňovány v současné literatuře. Dále budeme tyto metody aplikovat na oceňování jednoho typu bariérových opcí, kterým je up-and-out call opce. Nejprve se zaměříme na jednodušší a velmi používaný model průběhu ceny podkladového aktiva, na difúzní proces s konstantními parametry (často nazýván též geometrický Brownův pohyb). Posléze použijeme model se stochastickou volatilitou.

Charakteristiky zvolené bariérové opce a obeznámení s uvedenými modely najdeme ve třetí kapitole. Detailní popis aplikace metod redukce rozptylu použitý ve dvou různých modelech je obsažen v kapitole čtvrté a páté.

Simulace byly vytvořeny v programu Mathematica 6.0. Soubory jsou k diplomové práci přiloženy na datovém nosiči.

U čtenáře předpokládáme alespoň základní znalosti z oblasti financí a teorie pravděpodobnosti.

Kapitola 2

Metody redukce rozptylu

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se základními principy jednotlivých metod, které se snaží zvýšit efektivnost Monte Carlo simulací skrze snižování rozptylu požadovaných odhadů. Popis metod a většina příkladů vycházejí z knihy Paula Glassermana [3]. Mezi další prameny patří zejména [7].

O efektivnosti a využitelnosti uvedených metod se dá říci to, že některé metody jsou lépe využitelné, je-li výpočet omezen na počet průběhů n , jiné se obtížně používají při složitějších procesech. Obecně můžeme říci, že přínos jednotlivých metod závisí spíše na specifikách simulace a jejího průběhu než na všeobecné použitelnosti. V závislosti na podmínkách simulace se metody dají kombinovat.

Mějme Y_1, \dots, Y_n výstupy z n simulací. Pocházejí z jednoho rozdělení, které obvykle neznáme, a tak je naším cílem odhadnout alespoň střední hodnotu $E[Y]$. Je běžné, že hodnoty Y_1, \dots, Y_n , které jsou nezávislé, získáme v průběhu simulace transformací náhodných generátorů ze známého rozdělení. Mohou být např. vyjádřeny jako

$$Y_i = h(Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{id}),$$

pro $Z_{ij} \sim N(0, 1)$.

Z výpočetního hlediska nejjednodušším, a proto často používaným odhadem je aritmetický průměr

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

který je odhadem nestranným a konzistentním, tj.

$$E[\bar{Y}] = E[Y],$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{Y} - E[Y]| > \varepsilon) = 0.$$

Přesnost odhadu je dána jeho variabilitou, proto nám záleží na jeho malém rozptylu. Máme-li dva různé odhady střední hodnoty (např. aritmetický a vážený průměr nebo průměr a medián), řekneme, že jeden z nich je vydatnější, pokud má menší rozptyl než ten druhý. Vydatným odhadem je potom takový, který má nejmenší rozptyl ze všech možných odhadů.

Snažíme-li se tedy snížit rozptyl odhadu změnou průběhu simulace, měníme jeden odhad daného parametru za odhad vydatnější.

Jako odhad samotného rozptylu, který bývá využíván při intervalových odhadech střední hodnoty, slouží výběrový rozptyl¹ daný vzorcem

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$$

2.1 Metoda Antithetic Variates

Název této metody by se dal přeložit jako "opačné veličiny". Spočívá ve dvojitě využití jedné vygenerované hodnoty ze známého rozdělení. Například odhadujeme-li cenu opce skrze difúzní proces, potřebujeme při simulaci

¹Za výběrový rozptyl bývá někdy označován obdobný vzorec, který má ve jmenovateli místo n hodnotu $n-1$. Oba odhady jsou nestranné, ale odhad s $n-1$ je navíc konzistentní. Pro velké n však tento rozdíl nehraje roli.

generovat nezávislé hodnoty normovaného normálního rozdělení, které dále využíváme k výpočtu změny ceny podkladového aktiva. Při zohlednění metody Antithetic Variates použijeme vygenerovanou hodnotu z $N(0, 1)$ jednou se znaménkem plus a jednou se znaménkem mínus. Tímto jednoduchým "trikem" získáme hned dvě různé změny ceny podkladového aktiva. To je velkou výhodou převážně v situacích, kdy generování nových a nových hodnot náhodné veličiny vykazuje jistou časovou náročnost.

Vycházíme zde z úvahy, že je-li Z normálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou nula a konstantním rozptylem, značme $Z \sim N(0, \sigma^2)$, pak i $-Z$ je normálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou nula a stejným rozptylem. Obdobně můžeme zacházet i s rovnoměrně rozdělenými veličinami. Nechť U je rovnoměrně rozdělená náhodná veličina na intervalu $[0, 1]$, značíme $U \sim Unif[0, 1]$, pak $1 - U$ má totéž rozdělení. Chceme-li vygenerovat při simulování jednu cestu s využitím hodnot Z_1, Z_2, \dots, Z_d , resp. U_1, U_2, \dots, U_d můžeme snadno a rychle získat další cestu užitím $-Z_1, -Z_2, \dots, -Z_d$, resp. $1 - U_1, 1 - U_2, \dots, 1 - U_d$, aniž bychom nějak změnili či ovlivnili celou simulaci.

V případě jiných pravděpodobnostních rozdělení musíme zapojit inverzní distribuční funkci. Platí, že $F^{-1}(U)$ i $F^{-1}(1 - U)$ mají stejné rozdělení s distribuční funkcí F .

Pro odhad střední hodnoty $E[Y]$ využijme toto zobecnění. Nechť dvojice (Y_i, \tilde{Y}_i) , $i = 1, \dots, n$, jsou hodnoty získané výše zmíněným postupem, tj.

- dvojice $(Y_1, \tilde{Y}_1), (Y_2, \tilde{Y}_2), \dots, (Y_n, \tilde{Y}_n)$ jsou nezávislé, stejně rozdělené a
- pro každé i , Y_i a \tilde{Y}_i mají stejné rozdělení, ač nejsou nezávislé.

Odhad střední hodnoty $E[Y]$ pomocí metody Antithetic Variables je pak průměr všech $2n$ hodnot. Lze si jej ale rovněž představit jako průměr z n

průměrů opačných dvojic.

$$\hat{Y}_{AV} = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2} \right) \quad (2.1)$$

Stejně jako u předchozí metody se i zde budeme zabývat otázkou míry redukce rozptylu. V podmínkách velké časové náročnosti na získávání nových generátorů bude metoda Antithetic Variates jistě přínosná. V situaci, kdy není velký rozdíl mezi vygenerováním nové hodnoty Y_j a spočtením hodnoty \tilde{Y}_i , pak chceme, aby

$$\text{Var}[\hat{Y}_{AV}] < \text{Var} \left[\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_i \right].$$

Z nezávislosti dvojic i jednotlivých hodnot Y_i získáme

$$\text{Var}[Y_i + \tilde{Y}_i] < \text{Var}[Y_i + Y_j] = 2\text{Var}[Y_i], \quad i \neq j.$$

Levou stranu můžeme ještě dále upravit jako

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_i + \tilde{Y}_i] &= \text{Var}[Y_i] + \text{Var}[\tilde{Y}_i] + 2\text{Cov}[Y_i, \tilde{Y}_i] \\ &= 2\text{Var}[Y_i] + 2\text{Cov}[Y_i, \tilde{Y}_i]. \end{aligned}$$

Z posledních dvou rovnic vyplývá, že rozptyl hodnot získaných pomocí metody Antithetic Variates je menší než rozptyl $2n$ nezávislých hodnot, pokud

$$\text{Cov}[Y_i, \tilde{Y}_i] < 0.$$

Tato podmínka negativní kovariance není až tak triviálním předpokladem z toho důvodu, že $Y_i = h(Z_1, Z_2, \dots, Z_d)$, resp. $Y_i = h(U_1, U_2, \dots, U_d)$ a $\tilde{Y}_i = h(-Z_1, -Z_2, \dots, -Z_d)$, resp. $\tilde{Y}_i = h(1-U_1, 1-U_2, \dots, 1-U_d)$, kde h je libovolná funkce. Jak uvádí Glasserman v [3], postačí, když h bude funkce monotónní. V případě, že bude dokonce lineární, dojdeme k závěru, že $\text{Var}[Y_i + \tilde{Y}_i] = 0$, neboť

$$\frac{Z + (-Z)}{2} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{U + (1-U)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Závěrem shrňme, že používání metody "opačných" hodnot bude výhodné při velké náročnosti generování nových hodnot náhodných veličin či za předpokladu, že h bude skoro lineární.

2.2 Metoda Moment Matching

Název této metody, který lze do češtiny volně přeložit jako momentová metoda, naznačuje, že se budeme snažit zajistit rovnost teoretických a výběrových (centrálních) momentů. V nejjednodušším případě je to rovnost jen prvních momentů, tedy střední hodnoty a průměru. Dále můžeme porovnávat teoretický a výběrový rozptyl jako druhé centrální momenty a některé modely využívají i momenty vyšších řádů. V této práci se budeme zabývat prvními momenty, druhými momenty jen okrajově.

Moment Matching bývá používán zejména pro oceňování podkladových aktiv, neboť od přesnosti odhadu budoucí ceny aktiva se odvíjí i přesnost odhadu spravedlivé ceny derivátu. Její použití bude významné především v situaci, kdy generujeme málo hodnot.

Zmíníme dva různé postupy porovnávání momentů: transformace jednotlivých cest (generátorů) a jejich vážení. Obě varianty si popíšeme na simulování cen podkladového aktiva S_t za předpokladu

$$E[S_t] = e^{rt} S_0,$$

kde r je konstantní, rizikově neutrální úroková míra.

Simulujme náhodné generátory $S_{1t}, S_{2t}, \dots, S_{nt}$ a spočtěme jejich aritmetický průměr \bar{S}_t . Pro nevelké n můžeme očekávat, že dochází k vychýlení odhadu a že

$$e^{-rt} \bar{S}_t \neq S_0.$$

Abychom se vyhnuli takovému vychýlení, můžeme provést transformaci

generátorů aditivním nebo multiplikatívním způsobem:

$$\tilde{S}_{it} = S_{it} + E[St] - \bar{S}t, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

$$\tilde{S}_{it} = S_{it} \frac{E[St]}{\bar{S}t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

V obou případech jsme zajistili, že

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{S}_{it} = E[S_t]. \quad (2.4)$$

Příklad 2.2.1 *Využití této transformace lze názorně ukázat na formulaci put-call parity pro konečná n , která vychází z obecného tvaru*

$$e^{-rT} E[(S_T - K)^+] - e^{-rT} E[(K - S_T)^+] = S(0) - e^{-rT} K,$$

vzniklého přenásobením výrazem e^{-rT} a aplikací střední hodnoty na identitu

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

Vztahy (2.2) a (2.3), které zajišťují vlastnost (2.4), zajišťují zároveň

$$e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{S}_{iT} - K)^+ - e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (K - \tilde{S}_{iT})^+ = S_0 - e^{-rT} K.$$

Druhým uvedeným způsobem, jak přistoupit k metodě Moment Matching, je vážení jednotlivých hodnot, tedy nalezení takových vah w_1, \dots, w_n , pro které platí

$$\sum_{i=1}^n w_i S_{iT} = e^{rT} S_0, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

a které můžeme dále použít např. pro odhad ceny call opce

$$e^{-rT} \sum_{i=1}^n w_i (S_{iT} - K)^+.$$

Doposud jsme brali v úvahu jen první momenty. Nyní si na příkladu ukažeme možnost použití i druhých momentů.

Příklad 2.2.2 Předpokládejme, že chceme získat náhodné generátory Z_i , $i = 1, \dots, n$, které budou odpovídat výběru z normovaného normálního rozdělení. Jsme ale z jistých důvodů omezeni na počet generátorů. Tím zjevně dojde k vychýlení průměru \bar{Z} od nuly a výběrového rozptylu s^2 od jedné. Avšak normalizací původních generátorů na

$$Z_i^* = \frac{Z_i - \bar{Z}}{s}, \quad i = 1, \dots, n,$$

tedy odečtením průměru a vydělením směrodatnou odchylkou docílíme, že první dva výběrové (centrální) momenty odpovídají momentům teoretickým, neboť

$$\begin{aligned} \bar{Z}^* &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Z_i - \bar{Z}}{s} = \frac{\bar{Z} - \bar{Z}}{s} = 0, \\ s^{2*} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i - \bar{Z}}{s} - 0 \right)^2 = \frac{s^2}{s^2} = 1. \end{aligned}$$

Účinnost této metody bude patrná převážně pro malá n , kdy bude docházet k většímu vychýlení průměru od střední hodnoty a výběrového rozptylu od rozptylu teoretického.

2.3 Metoda Control Variates

Předpokládejme nyní, že při každé simulaci, ze které získáme hodnotu Y_i , jsme schopni generovat hodnotu X_i tak, že (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé, stejně rozdělené dvourozměrné veličiny a $E[X]$ známe. Za Y_i si můžeme představit například výplaty z americké opce a za X_i výplaty z opce evropské, jejíž střední hodnota je dána Black-Scholesovým vzorcem, vše za podmínek difúzního procesu.

Nechť b je konstanta. Definujme

$$Y_{i,CV} = Y_i - b(X_i - E[X]).$$

Odhad střední hodnoty $E[Y]$ získaný pomocí metody Control Variates je aritmetický průměr těchto veličin, tedy

$$\bar{Y}_{CV} = \bar{Y} - b(\bar{X} - E[X]). \quad (2.5)$$

Je rovněž nestranným odhadem, neboť platí

$$E[\bar{Y}_{CV}] = E[\bar{Y}] - b(E[\bar{X}] - E[X]) = E[\bar{Y}] = E[Y].$$

Jeho rozptyl je

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{Y}_{CV}] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[Y_i - b(X_i - E[X])] = \frac{1}{n} \text{Var}[Y_i - bX_i] \\ &= \frac{1}{n} \left(\text{Var}[Y] + b^2 \text{Var}[X] - 2b \text{Cov}[X, Y] \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Co budeme dosazovat za konstantu b ? S ohledem na náš cíl se musí jednat o optimální koeficient b^* minimalizující rozptyl (2.6), tedy

$$b^* = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}.$$

Nyní bychom si měli položit otázku, zda a jak moc vydatnější je odhad \bar{Y}_{CV} v porovnání s tradičním odhadem pomocí aritmetického průměru. Podívejme se na poměr jejich rozptylů.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Var}[\bar{Y}_{CV}]}{\text{Var}[\bar{Y}]} &= \frac{\text{Var}[\bar{Y} - b^*(\bar{X} - E[X])]}{\text{Var}[\bar{Y}]} \\ &= \frac{\text{Var}[Y] + (b^*)^2 \text{Var}[X] - 2b^* \text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[Y]} \\ &= 1 - \rho_{XY}^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Z tohoto poměru vyplývá, že druhou veličinou kontrolovaný odhad bude vydatnější tehdy, když X a Y budou korelované. Bude tím vydatnější, čím vyšší bude absolutní hodnota korelace. Zároveň musíme poukázat na skutečnost, že je tento poměr dosti citlivý na malé změny korelace. Pokud

bychom po čase zjistili, že X a Y nejsou tak silně (pozitivně či negativně) korelované, jak jsme předpokládali, nebyla by redukce rozptylu tak výrazná.

Jelikož neznáme střední hodnotu $E[Y]$, nebudeme často znát ani rozptyl, kovarianci a výpočet b^* nebude možný. Musíme proto při výpočtu konstanty b využít výběrový rozptyl a výběrovou korelací mezi pozorovanými hodnotami X_i a Y_i . Výsledný odhad pro střední hodnotu $E[Y]$ bude

$$\bar{Y}_{CV} = \bar{Y} - \hat{b}_n(\bar{X} - E[X]),$$

kde

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Příklad 2.3.1 *Výběr kontrolní veličiny X nemusí být často nijak náročný. Můžeme využít specifik dané simulace, která se zpravidla odvíjí od počáteční posloupnosti generátorů z nějakého známého rozdělení, např. z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Známe-li rozdělení, známe i střední hodnotu, zde 0,5, můžeme ji spolu s průměrem generátorů dosadit do (2.5). Zde pak platí obdobně poznámka uvedená u metody Antithetic Variates, tedy pokud by byla závislost Y na počáteční posloupnosti generátorů ze známého rozdělení dokonce lineární, výsledný rozptyl bude nulový.*

Můžeme využít i jiný nestranný odhad pro střední hodnotu, např. jeden z odhadů uvedených v této kapitole. Označme jej \tilde{Y} . Víme, že rozdíl $(\bar{Y} - \tilde{Y})$ má nulovou střední hodnotu. Odhad \bar{Y}_{CV} tedy může být roven $\bar{Y} - b(\bar{Y} - \tilde{Y})$. Krajní hodnoty $b = 0$ a $b = 1$ odpovídají situaci, kdybychom za odhad střední hodnoty vybrali jen jeden z dílčích odhadů, ale pro $b \in (0, 1)$ získáme CV odhad s menším rozptylem, než by měl každý z těch dvou.

2.4 Metoda Importance Sampling

Redukce rozptylu můžeme docílit i změnou pravděpodobnostní míry, tj. změnou pravděpodobnostního rozdělení náhodných generátorů. Předpoklá-

dejme, že hodnoty Y_i jsou funkcí náhodných generátorů z nějakého známého rozdělení. Např. pro normální rozdělení mějme $Y_i = h(Z_1, Z_2, \dots, Z_d)$.

Obecně se snažíme odhadnout

$$E[Y] = E[h(X)] = \int h(x)f(x)dx, \quad (2.8)$$

kde X je d -rozměrná náhodná veličina s hustotou f a funkce h je z \mathfrak{R}^d do \mathfrak{R} . Obvyklý odhad v podobě aritmetického průměru závisí na hodnotách X_i , které představují nezávislé náhodné generátory z rozdělení s hustotou f :

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i).$$

Nechť g je jiná hustota na \mathfrak{R}^d , která pro všechna $x \in \mathfrak{R}^d$ splňuje podmínku

$$f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0.$$

Vztah (2.8) můžeme přepsat na

$$E[Y] = \int h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) = E_g \left[h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right].$$

Symbolem $E_g[\cdot]$ chceme označit střední hodnotu danou hustotou g , nikoli hustotou f jako u $E[\cdot]$. Díky této změně hustoty získáme nestranný odhad pro střední hodnotu $E[Y]$

$$\hat{Y}_{IS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)}.$$

U této metody se nelze obecně vyjádřit k míře redukce rozptylu. Může dokonce dojít k jeho navýšení. Porovnejme nyní místo rozptylů raději druhé obecné momenty. Teoretický druhý moment je dán jako $E[Y^2] = E[h(X)^2]$. Druhý moment po změně hustoty je

$$\begin{aligned} E_g \left[\left(h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right)^2 \right] &= \int \left(h(x) \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 g(x) dx = \\ &= \int h(x)^2 \frac{f(x)}{g(x)} f(x) dx = E \left[h(X)^2 \frac{f(X)}{g(X)} \right] \end{aligned}$$

Míra redukce rozptylu pak závisí na poměru obou hustot. Úspěch metody Importance Sampling je tudíž podmíněn dobrým výběrem hustoty g , přičemž se obecně snažíme, aby $g(X)$ bylo velké pro velké hodnoty $h(X)$ a naopak. Pak totiž docílíme snížení výrazu $E[h(X)^2 \frac{f(X)}{g(X)}]$.

Při oceňování opcí dále využijeme fakt, že jednotlivé složky vektoru X jsou v podstatě nezávislé, stejně rozdělené. Proto lze poměr hustot (likelihood ratio) přepsat jako

$$\frac{f(X)}{g(X)} = \prod_{i=1}^d \frac{f_M(X_i)}{g_M(X_i)}.$$

Označením f_M a g_M se míní marginální hustoty d -rozměrného rozdělení se sdruženou hustotou f a g . Jak vyplývá z příkladu, tyto podíly lze často jednoduše stanovit.

Příklad 2.4.1 *Nechť se vektor X skládá z d složek, které jsou původně z $N(0, 1)$. Změňme nyní pravděpodobnostní rozdělení na $N(\alpha, 1)$. Marginální hustoty a poměr sdružených hustot pak nabývají podoby*

$$\begin{aligned} f_M(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \\ g_M(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right), \\ \prod_{i=1}^d \frac{f_M(Z_i)}{g_M(Z_i)} &= \exp\left(-\alpha \sum_{i=1}^d Z_i + d\frac{\alpha^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Při obecném posunutí z d -rozměrného $N_d(0, I)$ na $N_d(\mu, I)$, kde μ je d -rozměrný vektor a I je jednotková matice typu $d \times d$, se poměr hustot rovná

$$\frac{f(Z)}{g(Z)} = \exp\left(-\mu^T Z + \frac{1}{2}\mu^T \mu\right). \quad (2.9)$$

2.5 Metoda Stratified Sampling

Tato metody vychází z jednoduché věty o výpočtu střední hodnoty pomocí středních hodnot podmíněných:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^K P(Y \in A_i) \cdot E[Y|Y \in A_i], \quad (2.10)$$

kde A_1, A_2, \dots, A_K je systém disjunktních množin splňující

$$P(Y \in \bigcup_{i=1}^K A_i) = 1.$$

Označme $p_i = P(Y \in A_i)$ a n_i počet těch Y_i , které spadají do intervalu A_i . Podíl n_i vůči n se obecně nemusí p_i rovnat, ale bude se při náhodném generování této pravděpodobnosti s rostoucím n limitně blížit. Množiny A_i budeme nazývat *strata* (jednotné číslo *stratum*). Například pro rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$ si daný systém můžeme představit jako různé malé, disjunktní intervaly, jejichž sjednocením je $[0, 1]$. V případě normálního rozdělení by sjednocením musela být všechna reálná čísla.

V rámci metody Stratified Sampling můžeme sami rozhodnout, jak velké má každé n_i být. Postačí nám, že víme, že náhodný generátor spadající do A_i má rozdělení $Y|Y \in A_i$.

Jednou variantou je, že zajistíme, aby n_i/n bylo přibližně rovno teoretické pravděpodobnosti p_i . Označíme-li Y_{ij} , $j = 1, \dots, n_i$, výstupy příslušející i -tému stratu a využijeme-li (2.10), získáme vzorec pro odhad střední hodnoty pomocí metody Stratified Sampling:

$$\hat{Y}_{SS} = \sum_{i=1}^K p_i \cdot \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}. \quad (2.11)$$

Vztah (2.11) je podobný aritmetickému průměru. Rozdílem v náš prospěch je vlastnost, že \hat{Y}_{SS} nezohledňuje variabilitu generátorů mezi jednotlivými straty, aniž by potlačoval variabilitu uvnitř jednotlivých strat. Můžeme si to

představit tak, že při generování hodnot z normálního rozdělení za použití metody Stratified Sampling nemůže dojít k náhodnému nadbytečnému kumulování hodnot kolem střední hodnoty. Všechny generátory budou rozdělené po reálné ose a jejich histogram se bude podobat Gaussově křivce, tedy hustotě normálního rozdělení.

Jiná situace nastane, pokud se nebudeme držet proporcemi danými pravděpodobnostmi p_1, \dots, p_K a dovolíme, aby četnosti n_1, \dots, n_K nabývaly libovolných hodnot. S využitím označení $q_i = n_i/n$ musíme v poslední části rovnice (2.11) vynásobit součet generátorů v daném stratu poměrem jejich teoretického a realizovaného počtu.

$$\hat{Y}_{SS} = \sum_{i=1}^K p_i \cdot \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{q_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$$

Za určitých podmínek je výhodnější použít zobecnění vztahu (2.10)

$$E[Y] = \sum_{i=1}^K P(X \in A_i) \cdot E[Y|X \in A_i], \quad (2.12)$$

kde X je libovolná, i vícerozměrná veličina splňující $P(X \in \bigcup_{i=1}^K A_i) = 1$. Pak $p_i = P(X \in A_i)$ a generujeme nezávislé dvojice (X_{ij}, Y_{ij}) , $j = 1, \dots, n_i$.

Příklad 2.5.1 *Nechť U má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Za systém strat vezmeme*

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad A_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, A_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Pravděpodobnost každého strata je $1/n$, při proporcionalitě mezi pravděpodobností a počtem generátorů budeme generovat jednu hodnotu z každého strata.

Tu získáme jako

$$V_i = \frac{i-1 + U_i}{n}, i = 1, \dots, n,$$

kde každé U_i je náhodný generátor z $Unif[0, 1]$. Náhodná veličina V má podmíněné rozdělení $U|U \in A_i$.

V případě, že bychom chtěli různě pravděpodobná strata, vezmeme posloupnost $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{K-1} < a_K = 1$ a strata $A_i = (a_{i-1}, a_i]$. Má-li podmíněné rozdělení $U|U \in A_i$ být rovnoměrné na i -tém stratu, bude platit $V_i = a_{i-1} + U_i(a_i - a_{i-1})$.

Předpokládejme nyní, že máme obecné pravděpodobnostní rozdělení s distribuční funkcí F definovanou na \mathfrak{R} a inverzní distribuční funkcí definovanou jako $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \leq u\}$. Předpokládejme dále, že jsou dány pravděpodobnosti p_1, \dots, p_K a že lze nalézt posloupnost kvantilů

$$a_0 = -\infty, a_1 = F^{-1}(p_1), a_2 = F^{-1}(p_1 + p_2), \dots, a_K = F^{-1}(\sum p_i) = F^{-1}(1) = \infty,$$

a od ní odvozená strata

$$A_i = (a_{i-1}, a_i], \quad i = 1, \dots, K-1, \quad A_K = (a_{K-1}, a_K).$$

V tomto okamžiku můžeme pokračovat dvěma odlišnými způsoby. V případě, že budeme dále uvažovat $Unif[0, 1]$ na každém stratu, bude opět $V_i = a_{i-1} + U_i(a_i - a_{i-1})$. Použití rovnoměrné rozdělení na okrajových stratach $(-\infty, a_1]$ a (a_{K-1}, ∞) však může vést k velkým nepřesnostem. Zároveň dochází k velkému zkreslení při malém K .

Druhý způsob je značně náročnější na výpočet, neboť budeme častěji určovat hodnotu inverzní distribuční funkce, ale na druhou stranu dosáhneme větší preciznosti. Náhodné generátory budou lépe kopírovat dané rozdělení při malém K i v okrajových stratach.

V tomto druhém případě z počátku využijeme příklad 2.5.1. Rozdělíme interval $[0, 1]$ na libovolná strata a na každém i -tém stratu vygenerujeme N hodnot podle předpisu

$$V_{ij} = \frac{i-1 + U_{ij}}{n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N.$$

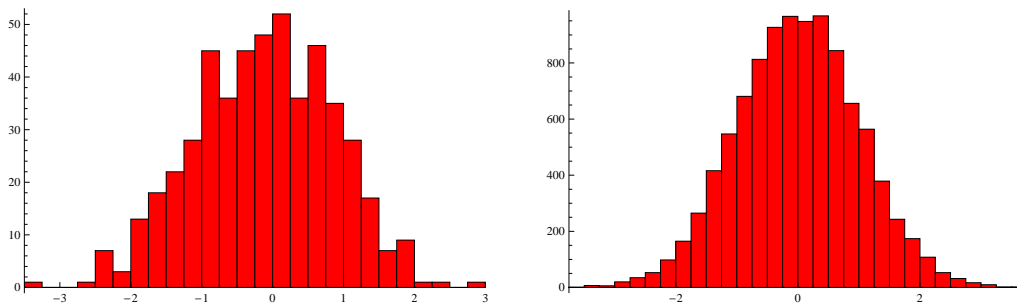
Teprve poté použijeme inverzní distribuční funkci zvoleného rozdělení. Náhodné generátory tvaru

$$F^{-1}(V_{ij})$$

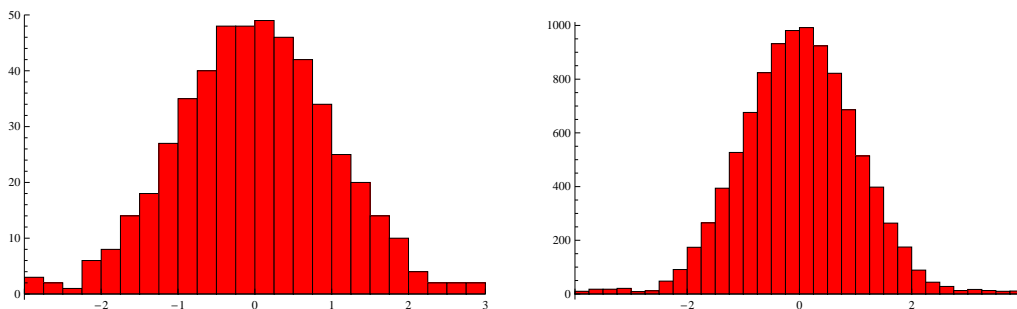
budou splňovat podmínku, že

$$F^{-1}(V_{ij}) \in A_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N.$$

Následující grafy zobrazují histogramy generátorů pro $N(0, 1)$. Chceme srovnat běžné náhodné generování a první výše uvedený způsob použití Stratified Sampling, tedy rovnoměrným rozdělením na každém stratu. Horní panel zachycuje histogramy bez použití metody Stratified Sampling, dolní s použitím této metody (100 stejně pravděpodobných strat). Grafy vlevo jsou vyhotoveny pro 500 generátorů (5 hodnot v každém stratu), grafy vpravo pro 10 000.



Obrázek 2.1: Simulace $N(0, 1)$. 500 a 10 000 generátorů.



Obrázek 2.2: Simulace $N(0, 1)$ s využitím metody Stratified Sampling. 500 a 10 000 generátorů.

Pro velké n si jsou oba histogramy dosti podobné, pro malé n je však vidět velký rozdíl. Na dolních grafem je vidno, že užití prvního způsobu při stratifikaci jiného než rovnoměrného rozdělení (jak zmíněno výše) dělá problémy v okrajových intervalech, může způsobovat tzv. těžké chvosty.

V některých případech jako je oceňování opcí, jejichž hodnota závisí na průběhu ceny podkladového aktiva (a mezi něž patří i námi zvolená bariérová opce), bychom chtěli stratifikovat pouze konečné hodnoty. Zde se pak užívá konstrukce tzv. Brownova mostu, který si přiblížíme až při implementaci na konkrétní model v další kapitole. Abychom čtenáři poskytli jistou základní představu, popíšme obrázek 2.3 přejatý z [3], strana 222.

Na tomto obrázku simulujeme deset různých vývoju náhodné veličiny X_t . Víme, že $X_0 = 0$, $X_1 \sim N(0, 1)$ a že známe-li X_0 a X_1 , jsme schopni dopočítat zbylé hodnoty $X_t, 0 < t < 1$. Pokud nám z jakýchkoli důvodů záleží jen na rozlišnosti hodnot X_1 , zajistíme, aby každá spadala do jiného z deseti stejně pravděpodobných strat a předchozí průběh dopočítáme.

Odpověď na tradiční otázku, k jak velké redukcí rozptylu pomocí této metody dojde, není tak jednoduchá. Mějme A_1, \dots, A_K strata stanovená dle (2.12) pro veličinu X , $p_i = P(X \in A_i)$ příslušné pravděpodobnosti a Y_{ij} generátory s rozdělením Y za podmínky $X \in A_i$. Označme

$$\mu_i = E[Y_{ij}] = E[Y|X \in A_i],$$

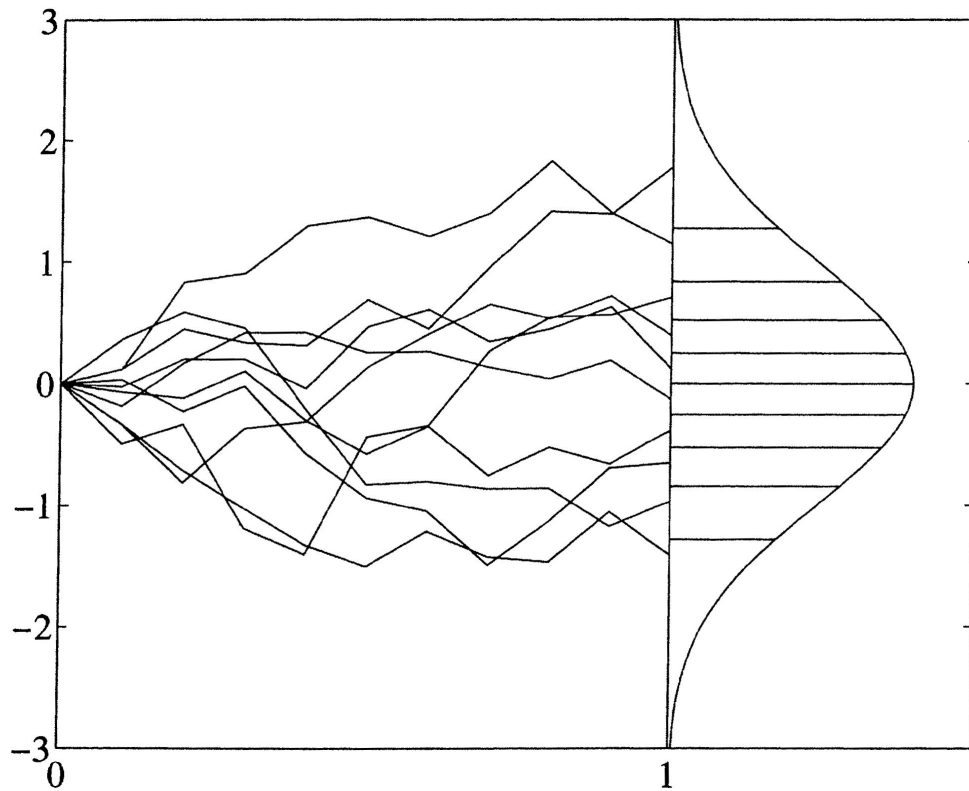
$$\sigma_i^2 = \text{Var}[Y_{ij}] = \text{Var}[Y|X \in A_i].$$

Nestrannost \hat{Y}_{SS} je patrná ze vztahu

$$E[\hat{Y}_{SS}] = \sum_{i=1}^K p_i \cdot \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} E[Y_{ij}] = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i = E[Y].$$

Pro rozptyl \hat{Y}_{SS} platí

$$\text{Var}[\hat{Y}_{SS}] = \sum_{i=1}^K p_i^2 \cdot \frac{1}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \text{Var}[Y_{ij}] = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{n_i} = \frac{\sigma^2(q)}{n}, \quad (2.13)$$



Obrázek 2.3: Simulace deseti průběhů veličiny X_t .

kde

$$\sigma^2(q) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{q_i}$$

je výraz, který budeme srovnávat s $\text{Var}[Y]$, neb $\text{Var}[\bar{Y}] = \text{Var}[Y]/n$.

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Y] &= E[Y^2] - (E[Y])^2 \\
&= \sum_{i=1}^K p_i \cdot E[Y^2|X \in A_i] - \left(\sum_{i=1}^K p_i \cdot E[Y|X \in A_i] \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^K p_i(\sigma_i^2 + \mu_i^2) - \left(\sum_{i=1}^K p_i\mu_i \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^K p_i\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^K p_i\mu_i^2 - \left(\sum_{i=1}^K p_i\mu_i \right)^2 \tag{2.14}
\end{aligned}$$

V případě proporcionality mezi p_i a n_i , kdy $p_i = q_i$ dojde ke zjednodušení výrazu $\sigma^2(q)$ na

$$\sigma^2(q) = \sum_{i=1}^K p_i\sigma_i^2.$$

Jestliže Jensenova nerovnost říká, že

$$\sum_{i=1}^K p_i\mu_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^K p_i\mu_i \right)^2,$$

pak

$$\text{Var}[\hat{Y}_{SS}] \leq \text{Var}[\bar{Y}],$$

tzn. že metoda Stratified Sampling s proporcionálním vztahem mezi p_i a n_i ovlivňuje rozptyl odhadu pouze směrem dolů. Případná rovnost nastává pro μ_i všechna stejná.

V případě libovolných n_i nedojde ke zjednodušení výrazu $\sigma^2(q)$ a hodnoty q_i ze vztahu (2.13) nevypadnou. Budeme-li tento vztah přes všechna přípustná q_i minimalizovat, tedy za podmínek $\sum_{i=1}^K q_i = 1$ a $q_i > 0, i = 1, \dots, K$, můžeme dosáhnout ještě větší redukce rozptylu.

Řešením jsou optimální hodnoty

$$q_i^* = \frac{p_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^K p_j\sigma_j},$$

$$\sigma^2(q^*) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{q_i^*} = \left(\sum_{i=1}^K p_i \sigma_i \right)^2.$$

Při používání této metody je často obtížné stanovit "podpůrnou" veličinu X , rozhodnout o systému strat či o hodnotách n_1, n_2, \dots, n_K . Další nevýhodou této metody je, že generování Y_{ij} , resp. (X_{ij}, Y_{ij}) může být pro některá strata daleko náročnější než pro strata zbývající.

2.6 Metoda Latin Hypercube Sampling

Metoda Latin Hypercube Sampling vychází ze stejných úvah jako Stratified Sampling, tj. z podmíněné střední hodnoty na sjednocení disjunktních intervalů. Umožňuje "stratifikaci" ve vyšších dimenzích, kdy vícerozměrná metoda Stratified Sampling selhává. Pod pojmem stratifikace rozumíme generování náhodných hodnot z dílčích intervalů. Detailního vysvětlení se nám dostává v [3] na příkladu d -rozměrné jednotkové krychle $[0, 1]^d$.

Chceme-li interval $[0, 1]$ rozdělit na K strat v každé dimenzi, dostaneme celkem K^d strat. Jelikož metoda Stratified Sampling požaduje alespoň jedno pozorování v každém stratu, potřebujeme dohromady alespoň K^d pozorování. Takový počet hodnot lze při malém d zajistit, ale pro větší d bychom potřebovali malé K , abychom byli schopni pracovat s daným počtem pozorování. Pro malá K však není stratifikace výhodná.

Tuto nevýhodu potřeby velkého množství pozorování metody Latin Hypercube Sampling potlačuje.

Mějme pevné d a K . Uvažujme d -rozměrnou jednotkovou krychli, interval $[0, 1]$ v každé dimenzi rozdělme na K strat po jednom pozorování. Nechť U_{ij} jsou pro každé $i = 1, \dots, d$, a každé $j = 1, \dots, K$ nezávislá, na intervalu $[0, 1]$ rovnoměrně rozdělené generátory. Nechť dále π_1, \dots, π_d představují nezávislé náhodné permutace čísel $1, \dots, K$.

Položíme-li

$$V_{ij} = \frac{\pi_{ij} - 1 + U_{ij}}{K} \quad (2.15)$$

a

$$Z_{ij} = \Phi^{-1}(V_{ij}),$$

představuje d -rozměrný vektor $(V_{1j}, V_{2j}, \dots, V_{dj})$ náhodný generátor z rovnoměrného rozdělení na $[0, 1]^d$, d -rozměrný vektor $(Z_{1j}, Z_{2j}, \dots, Z_{dj})$ náhodný generátor z d -rozměrného normovaného normálního rozdělení (Φ^{-1} indikuje inverzní distribuční funkci rozdělení $N(0, 1)$) a matice V_{ij} , resp. Z_{ij} náhodný výběr o velikosti K z daného d -rozměrného rozdělení. Hodnoty V_{ij} , resp. Z_{ij} dále transformujeme libovolnou funkcí tak, abychom dosáhli požadovaného odhadu.

V případě, že bychom neuvažovali d -rozměrnou krychli $[0, 1]^d$, ale obecné intervaly, dá se výše uvedený postup s K strat na intervalu $[0, 1]$ v každé z d dimenzí zobecnit na K_i strat na intervalu $[a_i, b_i]$ v i -té dimenzi.

Příklad 2.6.1 *Uvažujme, že chceme na základě předpokladu difúzního procesu odhadnout cenu podkladového aktiva za dva dny a chceme znát osm různých vývoju této ceny. Pak položíme $d = 2$ a $K = 8$, neboť chceme osm náhodných generátorů V_{ij} z dvourozměrného rovnoměrného rozdělení, které budeme posléze převádět na generátory Z_{ij} z dvourozměrného normovaného normálního rozdělení. Při použití metody Stratified Sampling bychom potřebovali 64 náhodných generátorů, každý z nich by ležel v jednom dílčím čtverečku (viz obr. 2.4).*

Pro nezávislé náhodné permutace

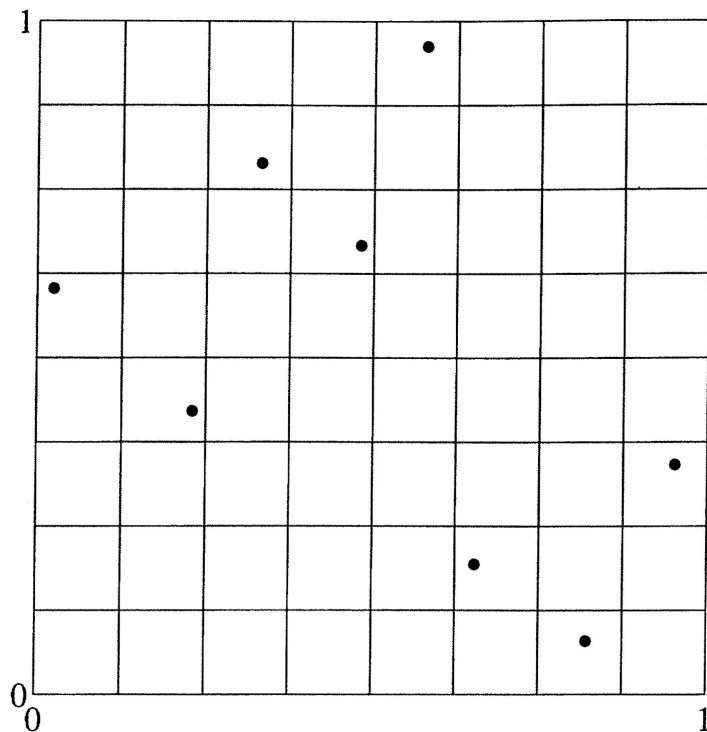
$$\pi_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \quad \text{a} \quad \pi_2 = (5, 4, 7, 6, 8, 2, 1, 3)$$

mohou hodnoty V_{ij} nabývat například hodnot

$$(0, 2; 4, 8), (1, 9; 3, 3), (2, 7; 6, 3), (3, 9; 5, 4),$$

$(4, 7; 7, 8)$, $(5, 2; 1, 6)$, $(6, 6; 0, 7)$ a $(7, 7; 2, 8)$.

Projekcí do dvourozměrné mřížky získáme obrázek 2.4 převzatý z [3].
Obdobné obrázky pro $d = 4$ lze nalézt v [7] na straně 121.



Obrázek 2.4: Náhodný výběr z dvourozměrného rovnoměrného rozdělení získaný metodou Latin Hypercube Sampling při $d = 2$ a $K = 8$.

Co se týče problematiky míry efektivity, odkazujeme z důvodu větší teoretické náročnosti na [3], str. 240. Zde poskytneme jen krátký souhrn.

Předpokládejme, že metodu Latin Hypercube Sampling používáme na $[0, 1]^d$ a že se snažíme odhadnout

$$\alpha_h = \int_{[0,1]^d} h(u) du$$

pro integrovatelnou funkci h , kterou transformujeme generátory na konečný výsledek, $h : [0, 1]^d \rightarrow \mathfrak{R}$. Standartní odhad při užití Monte Carlo simulací bude

$$\hat{\alpha}_h = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^K h(U_{1j}, \dots, U_{dj}),$$

kde U_{ij} jsou nezávislé, na $[0, 1]$ rovnoměrně rozdělené náhodné generátory. Označíme-li $\sigma^2 = \text{Var}[h(U_{1j}, \dots, U_{dj})]$, $j = 1, \dots, K$, pak $\text{Var}[\hat{\alpha}_h] = \sigma^2/K$.

Glasserman s odkazem na [10] rozkládá funkci h na dvě části. Nechť pro každé $i = 1, \dots, d$ a pro pevné $u \in [0, 1]$ máme funkci

$$h_i(u) = \text{E}[h(U_1, \dots, U_{i-1}, u, U_{i+1}, \dots, U_d)].$$

Můžeme pozorovat, že $h_i(U)$, $U \sim \text{Unif}[0, 1]$ má střední hodnotu α_f . Tutéž střední hodnotu má i

$$h_{add}(U_1, \dots, U_d) = \sum_{i=1}^d h_i(U_i) - (d-1)\alpha_h.$$

Lze dokázat, že rezidua definovaná jako

$$\varepsilon = h(U_1, \dots, U_d) - h_{add}(U_1, \dots, U_d)$$

jsou s $h(U_1, \dots, U_d)$ nekorelovaná. Proto lze rozptyl σ^2 rozložit na součet $\sigma^2 = \sigma_{add}^2 + \sigma_\varepsilon^2$. V [10] je dokázáno, že

$$\text{Var}[\hat{\alpha}_h] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{K} + o(1/K).$$

Tímto rozkladem je poukázáno na skutečnost, že míra redukce je závislá nejen na K , ale i na funkci h , kterou transformujeme generátory U_{ij} na konečnou požadovanou hodnotu. Největší efektivity lze totiž dosáhnout, pokud lze funkci h přiblížit součtu jednorozměrných "marginálních" funkcí jako

$$h(U_{1j}, \dots, U_{dj}) = \sum_{i=1}^d h_i(U_{ij}).$$

Kapitola 3

Ocenění bariérové opce

3.1 Charakteristiky up-and-out call opce

Ačkoli obyčejné opce (jako všechny deriváty) požadují malou počáteční investici, jsou přeci jen pro některé účastníky trhu drahé. Na základě toho vzniklo velké množství různě vylepšených opcí, mezi nimi i opce bariérové, které se dají koupit ještě laciněji. Cena však není jediným důvodem vzniku exotických derivátů. Dalšími jsou například potřeba lepšího finančního zajištění (hedging), účetní, daňové a jiné důvody.

Bariérové opce, jak již název napovídá, závisí na nějaké předem definované hranici, bariéře. V případě, že cena podkladového aktiva tuto bariéru směrem nahoru/dolů překoná, přestává/začíná opce existovat. Podle kombinace těchto dvou možností rozlišujeme up-and-out, up-and-in, down-and-out, down-and-in opce, kupní i prodejní. Up-and-out opce přestává existovat, kdykoli cena aktiva překoná jistou horní hranici směrem nahoru.

Obvyklými faktory ovlivňujícími výplatu z opce v čase T (a tak i cenu opce) jsou cena podkladového aktiva v čase T a realizační cena. V případě up-and-out opce závisí výplata i na celém průběhu ceny S_t , $0 \leq t \leq T$ a dále na výši bariéry H . Tato bariéra je nutně vyšší než počáteční cena

aktiva S_0 i než realizační cena K , jinak je hodnota up-and-out call opce nulová. Jak již uvedeno, bariéra ovlivňuje hodnotu opce tak, že překoná-li cena podkladového aktiva tuto hranici v jakémkoli okamžiku do uplatnění opce v čase T , opce přestává existovat. V souvislosti s výplatou z obyčejné call opce $(S_T - K)^+$ pak můžeme výplatu z up-and-out call opce vyjádřit jako

$$(S_T - K)^+ I_{\{S_t \leq H, 0 \leq t \leq T\}}, \quad (3.1)$$

kde $I_{\{\cdot\}}$ označuje indikátor podmínky uvedené v závorce.

Při dalším postupu uvažujme hodnoty $S_0 = 100$, $K = 108$, $H = 120$, $T = 1$, první tři údaje v měnových jednotkách, např. EUR a poslední údaj v letech. Neuvažujeme žádnou dividendu plynoucí z podkladového aktiva.

Na tomto místě pro zajímavost uvádíme analytický vzorec pro výpočet hodnoty up-and-out call opce c_{uo} při difúzním procesu (3.2) pro vývoj ceny podkladového aktiva, jak je uveden v [5]. Φ označuje distribuční funkci normovaného normálního rozdělení $N(0, 1)$. Z prvního vztahu je zřejmé, že cena up-and-out call opce je doplňkem ceny up-and-in call opce do ceny obyčejné call opce, jejíž cena c je dána Black-Scholesovým vzorcem.

$$c_{uo} = c - c_{ui},$$

$$c = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_1 - \sigma \sqrt{T}),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}},$$

$$\begin{aligned} c_{ui} &= S_0 \Phi(x_1) - K e^{-rT} \Phi(x_1 - \sigma \sqrt{T}) \\ &\quad - S_0 (H^*/S_0)^{2\lambda} [\Phi(-y) - \Phi(-y_1)] \\ &\quad + K e^{-rT} (H^*/S_0)^{2\lambda-2} [\Phi(-y + \sigma \sqrt{T}) - \Phi(-y_1 + \sigma \sqrt{T})], \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma^2},$$

$$y = \frac{\ln[H^{*2}/(S_0K)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T},$$

$$x_1 = \frac{\ln[S_0/H^*]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T},$$

$$y_1 = \frac{\ln[H^*/S_0]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$H^* = He^{0,5826\sigma\sqrt{T/m}}$$

Poslední vztah pro H^* umožňuje přechod ze spojitého pozorování ceny podkladového aktiva v případě tzv. spojitě opce na pozorování diskrétní, kdy máme údaje třeba jen jednou za den. m udává počet okamžiků do času T , kdy je cena pozorována, T/m pak udává délku časového intervalu mezi jednotlivými (stejně vzdálenými) pozorováními. Kdybychom dosazovali jen H , získáme cenu spojitě up-and-out call opce. Vztah pro H^* byl odvozen pány Broadie, Glasserman, Kou a poprvé uveřejněn v článku [2]. Jak sami autoři uvádí, při výpočtu ceny bariérové opce i na základě vzorce s touto úpravou může vznikat chyba až $1/\sqrt{m}$, proto výsledek budeme považovat jen jako kontrolní hodnotu.

Přidáním vztahu, jehož prostřednictvím dojde k navýšení bariéry z H na $He^{0,5826\sigma\sqrt{T/m}}$, jakoby nahrazujeme diskrétní bariérovou opci spojitou bariérovou opcí s vyšší bariérou. Vysvětlení je následující. Při spojitěm pozorování cen může dojít k překonání bariéry a opětnému návratu pod ní během tak krátkého časového intervalu, že by při diskrétním pozorování tento výkyv nebyl zaznamenán. Proto je bariéra o něco navýšena, aby tento vývoj neměl vliv ani na spojitou opci.

3.2 Modely pro vývoj ceny podkladového aktiva

Cena podkladového aktiva je často modelována prostřednictvím vztahu

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (3.2)$$

kde S_t je cena podkladového aktiva v čase t , μ , σ konstanty a W_t Wienerův proces. Počáteční podmínkou pro tuto stochastickou diferenciální rovnici je požadovaná hodnota $S_0 = 100$. Tento difúzní proces s konstantní volatilitou se též nazývá geometrický Brownův pohyb. V oblasti financí se používá od šedesátých let díky pracem Paula Samuelsona. Je na něm postaven i Black-Scholesův vzorec. Parametr μ lze interpretovat jako očekávaný výnos z podkladového aktiva, parametr σ pak jako volatilitu ceny podkladového aktiva.

Model se stochastickou volatilitou, kterým se budeme zabývat posléze¹, lze popsat vztahy

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dW_t^S, \quad (3.3)$$

$$d\sigma_t^2 = a(\sigma_L^2 - \sigma_t^2)dt + \xi\sigma_t^2 dW_t^\sigma. \quad (3.4)$$

σ_L značí dlouhodobou volatilitu na trhu, kterou položíme rovnu konstantní volatilitě z předchozího modelu, a a ξ jsou konstanty a W_t^S a W_t^σ nechť jsou dva různé, na sobě nezávislé Wienerovy procesy. Počátečními podmínkami je hodnota $S_0 = 100$ a $\sigma_0^2 = \sigma_L^2$. Výraz $(\sigma_L^2 - \sigma_t^2)$ zajišťuje, že se volatilita bude neustále pohybovat kolem své dlouhodobé hodnoty (mean reverting process). Je-li volatilita v čase t nižší než dlouhodobá a výraz $(\sigma_L^2 - \sigma_t^2)$ kladný, dojde v příštím časovém období k jejímu nárůstu. Výše tohoto nárůstu je determinována parametrem a , který lze interpretovat jako intenzitu návratu k dlouhodobé hodnotě.

¹Např. v [5] str. 459 lze nalézt obecnější vztah s k -tou mocninou ve výrazu $\xi\sigma_t^k dW_t^\sigma$.

Wienerův proces W_t je náhodný proces definovaný třemi následujícími vlastnostmi:

- $W_0 = 0$,
- W_t je skoro jistě spojitý a
- W_t má nezávislé přírůstky, pro něž platí $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$,
 $t > s \geq 0$.

Poslední vlastnosti, která říká, že přírůstek $W_t - W_s$ má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem $t - s$, později využijeme při substituci $dW_t = \sqrt{dt}\varepsilon_t$, resp. $\Delta W_t = \sqrt{\Delta t}\varepsilon_t$ pro $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

Vzhledem k obsahu a rozsahu této práce se nebudeme zabývat kalibrační modelů, tedy stanovením výše jednotlivých parametrů na základě historických dat. Konstanty položíme rovny hodnotám, které by v reálné situaci mohly přicházet v úvahu. Parametr μ musí být navíc z důvodu zachování rizikově neutrálního prostředí² roven rizikově neutrální úrokové sazbě r , kterou budeme používat k diskontování. K určení výše konstant v modelu se stochastickou volatilitou uijeme příklad v [5]³. Stanovíme $\mu = 0,08 = r$, $\sigma = 0,2 = \sigma_L$, $a = 0,01$ a $\xi = 0,18$.

3.3 Diskretizace procesu

Z praktického hlediska, tj. v situaci, kdy se neobchoduje nepřetržitě, nejsme schopni určovat tak malé změny ceny podkladového aktiva, abychom mohli užívat rovnice (3.2), (3.3) a (3.4) závislé na dt a dW_t . Musíme přistoupit k diskretizaci a přepsat rovnice tak, aby obsahovaly Δt a ΔW_t .

²Více v [3], strany 25-30.

³Příklad 17.2 na straně 376 v [5] se zabývá odhadem volatilit. Popisuje model GARCH(1,1) s parametry $\alpha = 0,13$, $\beta = 0,86$, ze kterých získáme potřebné konstanty jako $a = 1 - \alpha - \beta$ a $\xi = \alpha\sqrt{2}$.

Mějme časy $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$. V našem případě budeme uvažovat stejně vzdálené časové okamžiky, kterých bude 250 v roce (jako přibližný počet dní v roce, kdy se obchoduje), tj. $\Delta t = t_j - t_{j-1} = 1/250$, $j = 1, \dots, 250$, $t_0 = 0$ a $t_{250} = T = 1$. Označme S_j cenu podkladového aktiva v čase t_j a σ_j její volatilitu v čase t_j .

Stochastickou diferenciální rovnici (3.2) charakterizující difúzní proces můžeme ještě upravit díky Itôově formuli⁴ a díky třetí vlastnosti Wienerova procesu. Získáme rekurentní vztah

$$S_j = S_{j-1} \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_j \right), \quad (3.5)$$

ze kterého lze dovodit

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{250} \varepsilon_i \right),$$

kde ε_j jsou nezávislé, stejně rozdělené, $\varepsilon_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, \dots, 250$. U bariérové opce nás ale zajímá celý průběh ceny aktiva, proto musíme postupovat podle rekurentního vzorce.

Ze vztahu (3.5) a vztahu následujícího rovněž vyplývá, že cena podkladového aktiva v čase T má lognormální rozdělení, neboť s užitím vlastností Wienerova procesu můžeme psát

$$\ln \frac{S_T}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} \varepsilon,$$

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim N \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T, \sigma^2 T \right),$$

$$\ln S_T \sim N \left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T, \sigma^2 T \right).$$

S použitím výše uvedené diskretizace umíme vygenerovat jeden možný vývoj ceny podkladového aktiva S_t . Posouzením, zda při tomto vývoji došlo k překonání bariéry H , získáme výši výplaty v čase T dle vzorce (3.1).

⁴Viz např. kapitola 11.6 v [5] nebo kapitola 3.2 v [7].

Opakováním tohoto postupu získáme velký počet možných výplat v čase T . Diskontujeme-li jejich aritmetický průměr, dostaneme jakýsi standartní, nejjednodušší odhad.

Nechť S_{ij} značí cenu podkladového aktiva v čase t_j při i -tém simulovaném průběhu a ε_{ij} náhodný generátor z $N(0, 1)$, který je třeba pro určení S_{ij} . Pro n opakování, tj. pro n různých vývoje ceny aktiva máme standartní odhad ceny up-and-out call opce

$$\hat{c}_{uo} = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_{i250} - K)^+ I_{\{S_{ij} \leq H, j=1, \dots, 250\}}, \quad (3.6)$$

$$S_{ij} = S_{ij-1} \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{ij} \right), \quad (3.7)$$

$$S_{i0} = 100.$$

V případě druhého modelu, kde se vyskytuje další stochastická diferenciální rovnice pro proměnlivou volatilitu, zůstaneme u základních vztahů. Diskretizace obou procesů vede k rekurentním vztahům

$$\begin{aligned} S_j &= S_{j-1} + \Delta S_{j-1} \\ &= S_{j-1} + S_{j-1} (\mu \Delta t + \sigma_j \sqrt{\Delta t} \varepsilon_j^S) \\ &= S_{j-1} (1 + \mu \Delta t + \sigma_j \sqrt{\Delta t} \varepsilon_j^S), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_j^2 &= \sigma_{j-1}^2 + \Delta \sigma_{j-1}^2 \\ &= \sigma_{j-1}^2 + a(\sigma_L^2 - \sigma_{j-1}^2) \Delta t + \xi \sigma_{j-1}^2 \sqrt{\Delta t} \varepsilon_j^\sigma, \end{aligned}$$

pro ε_j^S a ε_j^σ nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny z $N(0, 1)$.

Standartní odhad získáme obdobně, opakovaným výpočtem ceny podkladového aktiva v čase T , odvozením výplaty, zprůměrováním a zdiskontováním.

Kapitola 4

Implementace jednotlivých metod v modelu s konstantní volatilitou

Značení používané u výkladu jednotlivých metod můžeme nyní blíže specifikovat:

$$c_{uo\ i} = Y_i = e^{-rT}(S_{i250} - K)^+ I_{\{S_{ij} \leq H, j=1, \dots, 250\}}. \quad (4.1)$$

$E[Y]$ v tomto modelu umíme určit díky analytickému vzorci uvedeném v podkapitole 3.1. Jeho výsledek pro námi požadované parametry je 0,3346.

Standartní odhad ceny up-and-out call opce $\hat{c}_{ou} = \hat{Y}$ je pro n různých vývojjů ceny podkladového aktiva aritmetický průměr hodnot (4.1), $i = 1, \dots, n$.

4.1 Metoda Antithetic Variates

Tuto metodu, o které můžeme říci, že patří mezi ty nejjednodušší na implementaci, budeme používat přesně tak, jak popsáno v podkapitole 2.1.

Při dosazování nově vygenerovaného vektoru $(\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{i250})$ do vztahu

(3.7) pro určení jednoho vývoje ceny podkladového aktiva S_{ij} můžeme zároveň dosadit i $(-\varepsilon_{i1}, \dots, -\varepsilon_{i250})$ a získat tak jiný průběh ceny \tilde{S}_{ij} . Odhad ceny up-and-out call opce pomocí metody Antithetic Variates lze pak vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\hat{c}_{uo,AV} &= e^{-rT} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left((S_{i250} - K)^+ I_{\{S_{ij} \leq H, j=1, \dots, 250\}} \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{S}_{i250} - K)^+ I_{\{\tilde{S}_{ij} \leq H, j=1, \dots, 250\}} \right), \\ S_{ij} &= S_{ij-1} \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{ij} \right), \\ \tilde{S}_{ij} &= \tilde{S}_{ij-1} \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{ij} \right).\end{aligned}$$

4.2 Metoda Moment Matching

Již jsme se zmiňovali, že touto metodou se koriguje hlavně odhadovaná cena podkladového aktiva. Proto zde provedeme jen jednu malou úpravu v postupu simulace.

Tím, že jsme omezeni na počet průběhů ceny, nemusí být hodnoty ε_{ij} v j -tém časovém okamžiku dostatečné na to, aby nedošlo k vychýlení průměru od střední hodnoty a výběrového rozptylu od rozptylu teoretického. Znormujeme proto všechny hodnoty $(\varepsilon_{1j}, \dots, \varepsilon_{nj})$ jejich průměrem a směrodatnou odchylkou.

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_j &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}, \quad s_{\varepsilon_j}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_j)^2, \\ S_{ij}^* &= S_{ij-1}^* \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \frac{\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_j}{s_{\varepsilon_j}} \right), \\ \hat{c}_{uo,MM} &= e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((S_{i250}^* - K)^+ I_{\{S_{ij}^* \leq H, j=1, \dots, 250\}} \right).\end{aligned}$$

4.3 Metoda Control Variates

V případě aplikace metody kontrolní proměnné si musíme klást otázku, jakou proměnnou, jejíž střední hodnotu známe, zvolit. Jak uvedeno u teoretického popisu této metody, největší redukce rozptylu dosáhneme, dosadíme-li za kontrolní proměnnou takovou, která bude s diskontovanou výplatou plynoucí z up-and-out call opce co nejvíce korelovaná (pozitivně i negativně).

V tomto případě přichází v úvahu diskontovaná cena podkladového aktiva v čase T se střední hodnotou¹ $E[S_{250}]e^{-rT} = S_0$ nebo z času T diskontovaná výplata plynoucí z obyčejné call opce, jejíž střední hodnota je dána výsledkem Black-Scholesova vzorce.

Jelikož ale výběrová korelace získaná při 100 000 simulacích vychází pro samotné aktivum i call opci velmi nízko, 0,07 pro aktivum a -0,04 pro call opci, pokusíme se najít ještě jiné řešení. Uvažujme portfolio složené z jednoduchých instrumentů, jehož závislost výplaty v čase T na ceně podkladového aktiva v čase T se dá považovat za obdobnou jako pro naši bariérovou opci. Obdobnou proto, že výplatu plynoucí z up-and-out call opce nelze s ohledem na překonání bariéry do času T zcela vyjádřit pomocí závislosti na S_T . Dosáhneme ale vyšší korelace.

Portfolio φ nechť se skládá ze tří opcí se stejným podkladovým aktivem jako up-and-out call:

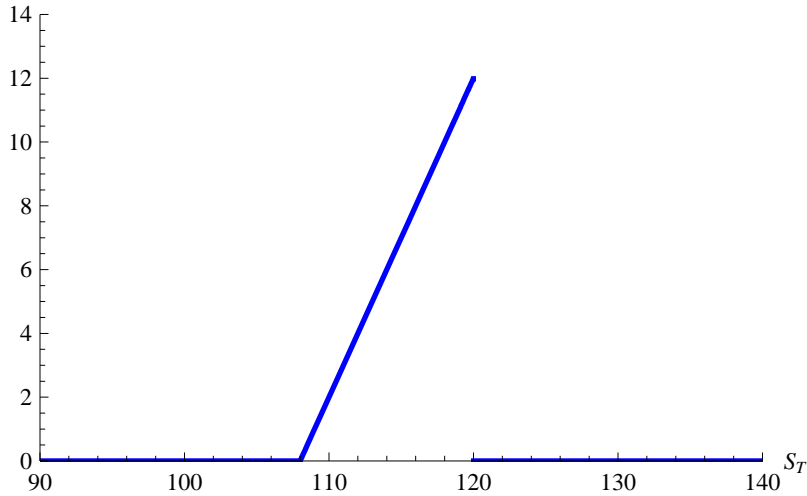
- long call opce s realizační cenou K ,
- short call opce s realizační cenou H a
- short cash-or-nothing call opce s realizační cenou H a s částkou $H - K$.

Tato pozice nám nepřinese nic, pokud $S_T < H$, jinak vyplatíme částku $H - K$.

¹Střední hodnota daná vlastnostmi rizikově neutrálního prostředí.

Takovéto portfolio φ je spojené s výplatní funkcí zobrazenou na obrázku 4.1 a je s naší opcí korelované mírou 0,47873. Jeho současná střední hodnota (určena Black-Scholesovým vzorcem) je

$$\begin{aligned} E[\varphi] &= S_0 \Phi\left(d_1(K)\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(d_1(K) - \sigma\sqrt{T}\right) \\ &\quad - S_0 \Phi\left(d_1(H)\right) - He^{-rT} \Phi\left(d_1(H) - \sigma\sqrt{T}\right) \\ &\quad - (H - K)e^{-rT} \Phi\left(d_1(H) - \sigma\sqrt{T}\right), \\ d_1(x) &= \frac{\ln(S_0/x) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$



Obrázek 4.1: Funkce závislosti výplaty plynoucí z uvedeného portfolia na ceně podkladového aktiva v čase T .

4.4 Metoda Importance Sampling

V návaznosti na příklad 2.4.1 uvažujme, že chceme změnit rozdělení ε_j z $N(0, 1)$ na $N(\alpha, 1)$ a že α chceme zvolit tak, abychom posléze dostali odhad

ceny opce s co nejmenším rozptylem. Dle úvah v [3] na stranách 268-270, hledáme α maximalizující funkci

$$F(z) - \frac{1}{2}z^T z, \quad (4.2)$$

kde

$$z = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{250})$$

a

$$F(z) = -rT + \ln[(S_{250} - K)^+ I_{\{S_j \leq H, j=1, \dots, 250\}}]$$

je zlogaritmovaná diskontovaná výplata plynoucí z opce, závislá na ceně podkladového aktiva S_j , která je sama o sobě funkcí z .

Chceme najít jeden vektor z a jeden vývoj ceny S_j tak, že funkce (4.2) dosáhne svého maxima. Pro jednoduchost budeme předpokládat konstantní ε_j , $j = 1, \dots, 250$. Tato podmínka pro nás znamená i to, že průběh S_j bude monotónní a nemusíme se starat o překročení bariéry H dříve než v době realizace. Dojdeme k závěru, že

$$\alpha = \arg \max_{\varepsilon} \left(-rT + \ln \left[(S_{250} - K)^+ I_{\{S_{250} \leq H\}} \right] - \frac{1}{2}250\varepsilon^2 \right),$$

kde

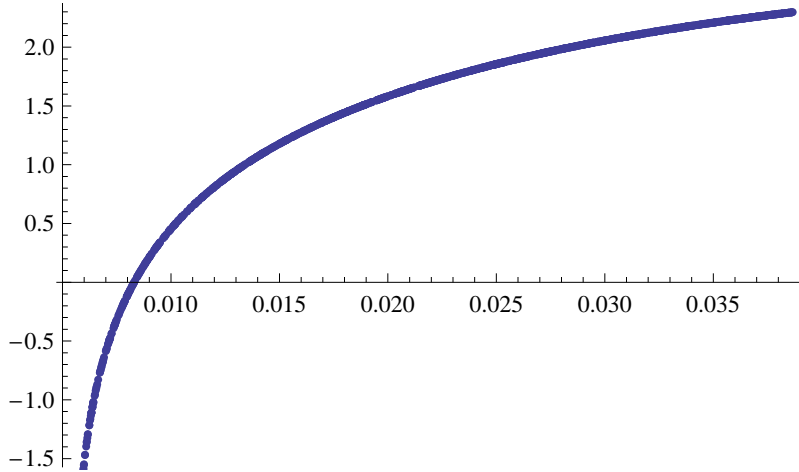
$$S_{250} = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{\Delta t} 250\varepsilon \right).$$

Sčítanec $-rT$ můžeme vypustit, neboť se jedná o konstantu nezávislou na ε . Můžeme se rovněž zaměřit jen na ta ε , pro něž je $K < S_{250} \leq H$, tj. pro něž je v argumentu logaritmu nula a hodnota funkce (4.2) by byla $-\infty$. Označme takové hranice pro $\varepsilon_{\varepsilon_K}$ a ε_H . Pro $\varepsilon_K < \varepsilon \leq \varepsilon_H$ pak hledáme argument maxima funkce

$$f_1(\varepsilon) = \ln \left[S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{\Delta t} 250\varepsilon \right) - K \right] - \frac{1}{2}250\varepsilon^2.$$

Intuitivně předpokládáme, že tato funkce bude maximální v případě $S_{250} = H$. Na obrázku 4.2, kde vidíme vykreslenou celou funkci pro ε

mezi $\varepsilon_K = 0,005364$ a $\varepsilon_H = 0,03868$, si tuto úvahu potvrdíme. Z grafu lze vyčíst, že funkce $f_1(\varepsilon)$ opravdu nabývá maximální hodnoty pro ε_H , pro něž $S_{250} = H$ a pro něž je nejvyšší výplata. Získáváme $\alpha = \varepsilon_H = 0,03868$.



Obrázek 4.2: Průběh funkce $f_1(\varepsilon)$ pro $0,005364 < \varepsilon \leq 0,03868$.

Postupujeme-li dále podle příkladu 2.4.1, změním rozdělení náhodných generátorů při výpočtu ceny podkladového aktiva na $\varepsilon_{ij}^\alpha \sim N(\alpha, 1)$, pro každé i spočteme diskontovanou hodnotu výplaty z opce dle obvyklého postupu daným vztahem (3.1), ale s dosazením ε_{ij}^α a přenásobíme ji koeficientem příslušným každému i vyjadřujícím poměrem sdružených hustot

$$\exp \left[-\alpha \sum_{j=1}^{250} \varepsilon_{ij}^\alpha + \frac{1}{2} 250 \alpha^2 \right].$$

4.5 Metoda Stratified Sampling

V případě simulování vývoje ceny podkladového aktiva je zbytečné stratifikovat při každém posunu v čase o Δt . Důležité je stratifikovat konečnou

cenu v čase $T = 1$, tj. S_{250} . Jak jsme se již zmínili v předchozí kapitole, můžeme využít konstrukce tzv. Brownova mostu.

Vycházíme z posloupnosti W_1, \dots, W_{250} , pro niž podle vlastností Wienerova procesu platí $W_i - W_{i-1} = \sqrt{\Delta t} \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, 250$, $W_0 = 0$. Platí i

$$S_{250} = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_{250} \right),$$

kde $W_{250} = \sqrt{T} \varepsilon$ pro $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

Nechť simulujeme K různých vývoju ceny podkladového aktiva, každý ve 250-ti dílčích krocích. Chceme, aby S_{i250} spadalo do i -tého strata, tj. vytváříme K stejně pravděpodobných strat. Nechť tedy

$$V_i = \frac{i - 1 + U_i}{K}, \quad U_i \sim Unif[0, 1],$$

$$W_{i250} = \sqrt{T} \Phi^{-1}(V_i).$$

Z konečné hodnoty W_{i250} vypočítáme všechna předchozí W_{ij} a S_{ij} dle vztahů²

$$W_{ij} = \frac{t_{250} - t_j}{t_{250} - t_{j-1}} W_{ij-1} + \frac{t_j - t_{j-1}}{t_{250} - t_{j-1}} W_{i250} + \sqrt{\frac{(t_{250} - t_j)(t_j - t_{j-1})}{t_{250} - t_{j-1}}} \varepsilon_{ij},$$

$$S_{ij} = S_{ij-1} \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma (W_{ij} - W_{ij-1}) \right).$$

4.6 Metoda Latin Hypercube Sampling

Již jsme zmínili, že tato metoda nahrazuje Stratified Sampling v případě generování náhodného výběru ve vyšších dimenzích. Na rozdíl od předchozího postupu, kdy jsme stratifikovali S_T pomocí Brownova mostu, nyní bychom rádi stratifikovali hodnoty S_t v každém kroku, abychom dosáhli dostatečné proměnlivosti ve změnách ceny aktiva. To implikuje, že počet dimenzí d je

²Vzorec pro W_{ij} spolu s odvozením uveden v [3] na straně 221.

250 a K je rovno počtu cest. Nejdůležitějším vztahem této metody je (2.15). Připomínáme, že π_i jsou nezávislé náhodné permutace čísel $1, \dots, K$.

Tato metoda není nikterak náročná na implementaci, ale její nevýhodou, jak později uvidíme, je velká časová náročnost na výpočet hodnot inverzní distribuční funkce.

4.7 Srovnání metod

Výpočet odhadu ceny up-and-out call opce získaný aplikací výše zmíněných metod budeme mnohokrát opakovat, abychom mohli spočítat průměr a výběrový rozptyl jednotlivých typů odhadů. Pro dobrou vypovídací schopnost bývá doporučeno 1000 opakování.

Průměrné odhady z každé metody můžeme srovnávat s výsledkem výše zmíněného analytického vzorce.

K porovnání efektivnosti jednotlivých metod nám bude sloužit rozptyl odhadů. Z důvodu větší srozumitelnosti výstupů se budeme konkrétně zabývat poměrem standardního odhadu a vylepšeného odhadu. Tento poměr nám říká, kolikrát se pomocí dané metody odhad snížil.

Dalším pro nás relevantním kritériem je časová náročnost výpočtů. Snažíme se snižovat rozptyl odhadu, ale nebylo by příjemné zjistit, že se nám pomocí některé metody podařilo o něco málo snížit rozptyl na úkor dvojnásobné doby trvání výpočtu. Chceme srovnávat metody za podmínky, že výpočty poběží přibližně stejně dlouho, a tak budeme muset korigovat počet cest ceny aktiva pro výpočet jednoho odhadu.

Začali jsme s výpočtem pro 1000 cest a 1000 opakování v případě standardního odhadu. Tento výpočet trval přibližně 3630 sekund, méně než čtyři sekundy na výpočet jednoho odhadu ceny opce získaného z tisíce cest ceny aktiva. Počet cest budeme u jednotlivých metod obvykle redukovat tak, aby výpočty trvaly srovnatelně dlouho. Tabulka 4.1 obsahuje údaje o jednot-

livých metodách, při jakém počtu cest byly výpočty prováděny, jak dlouho trvaly (údaje v sekundách), jaký je průměr a rozptyl odhadů a poměr rozptylů.

Metoda	Počet cest	Čas	Průměr	Rozptyl	Poměr
Standartní odhad	1000	3630	0,3315	0,04407	
Antithetic Variates	500	3610	0,3313	0,001733	25
MomentMatching	700	3637	0,3296	0,002461	18
Control Variates	560	3611	0,3335	0,002784	16
Importance Sampling	1150	3577	0,3298	0,001603	27
Stratified Sampling	240	3702	0,3322	0,005472	8
Latin Hypercube Sampl.	36	3698	0,3309	0,04609	0,96

Tabulka 4.1: Údaje o jednotlivých metodách při větším počtu cest

U metod Antithetic Variates a Importance Sampling jsme získali velmi dobré výsledky. Rozptyl se podařilo snížit na jednu pěťadvacetinu, aniž bychom prodloužili dobu výpočtu. Metody Moment Matching a Control Variates rovněž pomohly k velkému zlepšení. Zároveň se zajímáme, zda by tyto dvě metody byly efektivnější při menším počtu různých vývoju cen. Podívejme se na tabulku 4.2, která zachycuje výsledky při malém počtu různých vývoju pro cenu podkladového aktiva. Tisíc opakování pro výpočet průměru a rozptylu jsme ponechali. Je zřejmé, že Importance Sampling spolu s Antithetic Variates budou stále přinášet nejvýraznější zlepšení. Poměry redukce mezi jednotlivými metodami navzájem jsou velmi obdobné jako při velkém počtu opakování. Je rovněž patrné, že s rostoucím počtem různých vývoju ceny aktiva budou metody přinášet stále větší zlepšení, přičemž ze srovnání uvedených dvou tabulek lze odvodit, že stále platí poměr $1/\sqrt{n}$. První výsledky jsou postaveny na desetinásobném počtu cest než výsledky v druhé tabulce a poměry u každé metody jsou přibližně trojnásobkem, tedy

násobkem ve výši $\sqrt{10} = 3,16$.

Metoda	Počet cest	Čas	Průměr	Rozptyl	Poměr
Standartní odhad	100	376	0,3387	0,1399	
Antithetic Variates	50	362	0,3295	0,01814	7,7
MomentMatching	70	353	0,3332	0,02432	5,8
Control Variates	56	355	0,3346	0,03231	4,4
Importance Sampling	115	346	0,3371	0,01537	9,1
Stratified Sampling	24	348	0,3330	0,05973	2,3
Latin Hypercube Sampl.	4	409	0,3289	0,2430	0,6

Tabulka 4.2: Údaje o jednotlivých metodách při menším počtu cest.

Stratified Sampling a Latin Hypercube Sampling jsou časově velmi náročné metody, a proto při omezeném čase nepřináší tak dobré výsledky jako ostatní metody. Na vině je časová náročnost výpočtu hodnot inverzní distribuční funkce. Tomuto problému by se dalo čelit tím, že bychom hodnoty inverzní distribuční funkce tabelovali. Předem bychom spočetli např. 100 000 hodnot a pak by pro každou pravděpodobnost ve výši násobku 0.000 01 docházelo k přímému přiřazení hodnoty. Museli bychom zároveň upravit generátory V_{ij} , tak aby neobsahovaly U_{ij} ze spojitého rovnoměrného rozdělení, ale z diskrétního.

Pro představu uvádíme i srovnání výsledků při stejném zadání. S ohledem na dobu výpočtu nechť je to např. 100 cest a 100 opakování. Z tabulky 4.3 vyplývá, že odhlédneme-li od doby trvání výpočtu, jsou všechny metody pro stejné zadání srovnatelné. Jen Antithetic Variates poskytuje výraznější vylepšení než metody ostatní, neboť touto metodou v podstatě zdvojnásobujeme počet cest. Zároveň si můžeme povšimnout, že rozptyly jsou řádově srovnatelné s tabulkou 4.2, ale průměry ne. Tímto jsme se ujistili, že sto opakování je nedostatečný počet pro stanovení průměru a rozptylu

odhadu.

Metoda	Čas	Průměr	Rozptyl	Poměr
Standartní odhad	38	0,3200	0,1361	
Antithetic Variates	69	0,3273	0,01052	13
MomentMatching	49	0,3100	0,01666	8,2
Control Variates	61	0,3216	0,01345	10,1
Importance Sampling	32	0,3072	0,01592	8,6
Stratified Sampling	150	0,3360	0,01247	10,9
Latin Hypercube Sampl.	958	0,3104	0,01483	9,2

Tabulka 4.3: Údaje o jednotlivých metodách při stejném zadání 100 x 100.

Získané výsledky nás přivádí ještě k úvaze nad skutečností, že průměry odhadů ze simulací neodpovídají výsledku analytického vzorce. Podle toho má být cena up-and-out call opce za našich podmínek rovna 0,3346. Ze simulací ale vidíme, že průměry se pohybují v rozmezí 0,3296 a 0,3333. Spustíme-li jedenkrát odhad pro 1 000 000 cest při použití Importance Sampling, získáme odhad 0,3310. Tímto se opět vracíme ke článku [2] a k přizpůsobení původního vzorce pro spojitě bariérové opce na vzorec pro diskrétní opce. Zmiňovaná chyba odhadu, která v některých případech může činit až $1/\sqrt{m}$, tj. až 6% pro zadané parametry, zde činí 1%. To nás vede k závěru, že chceme-li získat opravdu přesné hodnoty pro bariérové opce, je lepší provádět Monte Carlo simulace než se spoléhat na analytický vzorec.

Kapitola 5

Implementace jednotlivých metod v modelu se stochastickou volatilitou

Použití všech metod jsme si ukázali na jednodušším modelu s konstantní volatilitou. Když teď přejdeme ke složitějšímu modelu se stochastickou volatilitou, vybereme už jen některé metody. Metody Antithetic Variates, Moment Matching a Control Variates patří k těm jednodušším a nebude problém je použít i v tomto případě. K aplikaci metody Importance Sampling přistoupíme obdobně jako v předchozím případě. Metodami Stratified Sampling a Latin Hypercube Sampling se zabývat nebudeme z důvodu jejich obtížné implementace a jejich velké časové náročnosti.

Model se stochastickou volatilitou (3.3), (3.4) pracuje s dvěma nezávislými náhodnými procesy. Pro n vývoji ceny $S_{i,j}$ budeme muset vygenerovat dvojnásobný počet náhodných generátorů a vedle hodnot $S_{i,j}$ vypočítat i hodnoty $\sigma_{i,j}^2$. Přistoupíme proto ke změně počtu časových okamžiků v roce, pro které budeme hodnoty počítat. Snižme původní počet z 250 jen na 100. Index j se v této kapitole bude pohybovat pouze od 1 do 100.

Připomínáme, že

$$S_{ij} = S_{ij-1}(1 + \mu\Delta t + \sigma_{ij}\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{ij}^S), \quad (5.1)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ij-1}^2 + a(\sigma_L^2 - \sigma_{j-1}^2)\Delta t + \xi\sigma_{j-1}^2\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{ij}^\sigma, \quad (5.2)$$

s počátečními podmínkami

$$S_{i0} = 100, \quad \sigma_{i0}^2 = \sigma_L^2,$$

s parametry $\Delta t = 1/100$, $\mu = 0,08$, $\sigma_L = 0,2$, $a = 0,01$ a $\xi = 0,18$ a s ε_{ij}^S , ε_{ij}^σ nezávislými náhodnými generátory z $N(0,1)$.

Standartní odhad ceny up-and-out call opce v podmínkách modelu se stochastickou volatilitou získáme dosažením S_{ij} vypočtených podle vzorce (5.1) do vztahu

$$\hat{c}_{uo} = e^{-rT} \sum_{i=1}^N (S_{i100} - K)^+ I_{\{S_{ij} \leq H, j=1, \dots, 100\}}.$$

5.1 Metoda Antithetic Variates

Pro výpočet jednoho průběhu ceny podkladového aktiva S_{i1}, \dots, S_{i100} dle (5.1) a (5.2) jsou třeba hodnoty $\varepsilon_{i1}^S, \dots, \varepsilon_{i100}^S$ a $\varepsilon_{i1}^\sigma, \dots, \varepsilon_{i100}^\sigma$. Metoda Antithetic Variates nás navádí ke spočtení dalšího průběhu $\tilde{S}_{i1}, \dots, \tilde{S}_{i100}$ z generátorů $-\varepsilon_{i1}^S, \dots, -\varepsilon_{i100}^S$ a $-\varepsilon_{i1}^\sigma, \dots, -\varepsilon_{i100}^\sigma$.

Na základě teoretického popisu této metody můžeme uvažovat ještě jednu variantu. V podkapitole 2.1 je zmíněno, že odlišnost rozptylu standartního odhadu a vylepšeného odhadu závisí i na kovarianci mezi Y_i a \tilde{Y}_i , funkčními hodnotami odvozenými od původních a opačných generátorů z $N(0,1)$ Proto bychom mohli zkusit změnit znaménka jen u náhodného procesu pro vývoj ceny a počítat odhad z $(\varepsilon_{ij}^S, \varepsilon_{ij}^\sigma)$ a $(-\varepsilon_{ij}^S, \varepsilon_{ij}^\sigma)$.

V závěru kapitoly se podíváme na výsledky obou postupů. Označme metodu s $(\varepsilon_{ij}^S, \varepsilon_{ij}^\sigma)$ a $(-\varepsilon_{ij}^S, -\varepsilon_{ij}^\sigma)$ jako Antithetic Variates 1 a metodu s $(\varepsilon_{ij}^S, \varepsilon_{ij}^\sigma)$ a $(-\varepsilon_{ij}^S, \varepsilon_{ij}^\sigma)$ jako Antithetic Variates 2.

5.2 Metoda Moment Matching

V modelu s konstantní volatilitou jsme při výpočtu S_{ij} dle vztahu (3.7) nedosazovali ε_{ij} , ale jeho znormovanou hodnotu $\frac{\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_j}{s_{\varepsilon_j}}$. V modelu se stochastickou volatilitou zacházíme v každém kroku s dvěma náhodnými generátory. Můžeme normovat každý proces zvlášť nebo oba dohromady. Předpokládáme, že přínosnější bude varianta druhá, neboť počítáme průměr a odchylku na základě dvojnásobného počtu hodnot. Do (5.1) a (5.2) proto budeme dosazovat normované generátory

$$\frac{\varepsilon_{ij}^S - \bar{\varepsilon}_j}{s_{\varepsilon_j}} \quad \text{a} \quad \frac{\varepsilon_{ij}^\sigma - \bar{\varepsilon}_j}{s_{\varepsilon_j}},$$

kde

$$\bar{\varepsilon}_j = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{ij}^S + \varepsilon_{ij}^\sigma), \quad s_{\varepsilon_j}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left((\varepsilon_{ij}^\sigma - \bar{\varepsilon}_j)^2 + (\varepsilon_{ij}^S - \bar{\varepsilon}_j)^2 \right).$$

5.3 Metoda Control Variates

Podle značení v podkapitole 2.3 je veličinou Y diskontovaná výplata z up-and-out call opce odvozená z cen podkladového aktiva podle vzorců (5.1) a (5.2).

Kontrolní proměnnou X v tomto modelu mohou být všechny tři možnosti uvedené u předchozího modelu. Jednalo se o diskontovanou cenu podkladového aktiva S_{100} , diskontovanou výplatu plynoucí z obyčejné call opce a diskontovanou výplatu z vytvořeného portfolia. Zde se však domníváme, že za stávajících podmínek můžeme docílit ještě větší korelace, pokud za kontrolní proměnnou vezmeme diskontované výplaty spojené s up-and-out call opcí vypočtené v modelu s konstantní volatilitou při dosazení stejných generátorů pro S_{ij} , tedy výplaty odvozené z cen podkladového aktiva daných jako

$$S_{ij} = S_{ij-1} (1 + \mu \Delta t + \sigma_L \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{ij}^S).$$

Střední hodnotu takto zvolené kontrolní proměnné bychom měli získat ze vzorce uvedeného v podkapitole 3.1. Výsledek bude jiný než v předchozí kapitole, protože máme jiný počet časových kroků. Za m budeme místo 250 dosazovat jen 100. Výsledná hodnota je 0,3759. V závěru předchozí kapitoly jsme dospěli k závěru, že výsledky tohoto vzorce jsou ve srovnání s výsledky simulací nadhodnocené. S ohledem na možnou chybu při dosazení výsledku analytického vzorce, dosadíme za střední hodnotu odhad získaný pomocí nejpřesnější metody, tedy Importance Sampling při 1 000 000 cestách¹, který je 0,3695.

Hodnota výběrové korelace mezi bariérovou opcí v prvním a druhém modelu při 100 000 simulacích činí 0,8653.

5.4 Metoda Importance Sampling

U implementace této metody v případě modelu s konstantní volatilitou jsme transformovali rozdělení tak, že jsme náhodné generátory posunuli o konstantu α , tj. změnili jsme rozdělení z $N(0, 1)$ na $N(\alpha, 1)$. Hodnotu konstanty α jsme získali při maximalizaci funkce (4.2) přes všechna $z = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{250})$. V modelu se stochastickou volatilitou získává tato proměnná novou podobu $z = (\varepsilon_1^S, \dots, \varepsilon_{100}^S, \varepsilon_1^\sigma, \dots, \varepsilon_{100}^\sigma)$, ale stále se snažíme najít argument maxima funkce (4.2).

Abychom dosáhli co největší analogie s postupem v případě prvního modelu, zužme výběr mezi všemi možnými z na taková, která mají všechny prvky vektoru konstantní, a to nenulové v první polovině a nulové v polovině druhé, tj. $z = (\varepsilon, \dots, \varepsilon, 0, \dots, 0)$. Dosáhneme tak opět konstantní volatility na úrovni σ_L , lineárního průběhu ceny S_j a zjednodušení na maximalizaci

¹Pokud jsme uváděli hodnoty získané při 100 000 simulacích, sloužily jen pro orientaci. Na tomto údaji závisí další výsledek, a tak ho spočteme při 1 000 000 simulacích.

funkce

$$f_2(\varepsilon) = \ln \left[S_0(1 + \mu\Delta t + \sigma_L\sqrt{\Delta t}\varepsilon)^{100} - K \right] - \frac{1}{2}100\varepsilon^2$$

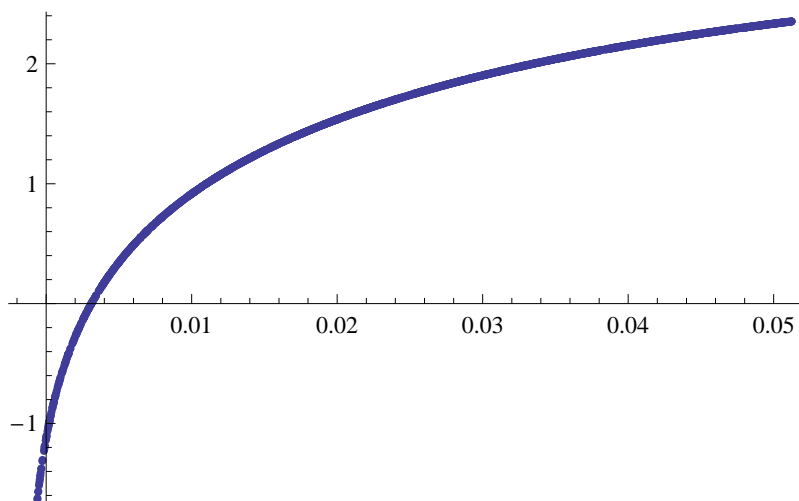
pro všechna ε , pro něž S_{100} leží mezi realizační cenou a bariérou, tedy

$$K < S_0(1 + \mu\Delta t + \sigma_L\sqrt{\Delta t}\varepsilon)^{100} \leq H.$$

Průběh této funkce můžeme vidět na obrázku 5.1. Stejně jako v minulém případě,

$$\alpha = \arg \max_{\varepsilon_K < \varepsilon \leq \varepsilon_H} f_2(\varepsilon) = \varepsilon_H.$$

Hodnota této konstanty² pro model se stochastickou volatilitou se zadanými parametry je 0,05124.



Obrázek 5.1: Průběh funkce $f_2(\varepsilon)$ pro $-0,001505 < \varepsilon \leq 0,05124$.

Při výpočtu S_{ij} a σ_{ij}^2 podle rovnic (5.1) a (5.2) tedy generujeme $\varepsilon_{ij}^S \sim N(\alpha, 1)$ a $\varepsilon_{ij}^\sigma \sim N(0, 1)$, z nich určujeme diskontovanou hodnotu výplaty z

²Upozorňujeme, že rovnice $H = S_0(1 + \mu\Delta t + \sigma_L\sqrt{\Delta t}\varepsilon)^{100}$ má sto kořenů, které jsou i komplexní. Pro $\varepsilon \sim N(0, 1)$ však přichází v úvahu jen jeden z nich.

up-and-out call opce v i -tém průběhu, kterou posléze přenásobíme příslušným podílem hustot odvozeným z obecného tvaru (2.9)

$$\exp \left[-\alpha \sum_{j=1}^{100} \varepsilon_{ij}^S + \frac{1}{2} 100\alpha^2 \right].$$

5.5 Srovnání metod

Začneme opět s výpočtem standartního odhadu popsáním na začátku této kapitoly pro 1000 různých vývoju ceny aktiva a 1000 opakování pro stanovení průměru a rozptylu odhadu. Délce trvání tohoto výpočtu, tedy cca 4700 sekundám, tj. zhruba pěti sekundám na jeden dílčí odhad, přizpůsobíme výpočty ostatních odhadů, vždy s úpravou počtu průběhů ceny a tisícem opakování. Jejich výsledky najdeme v tabulce 5.1. Připomínáme, že jsme popsali dva různé postupy v případě metody Antithetic Variates.

Metoda	Počet cest	Čas	Průměr	Rozptyl	Poměr
Standartní odhad	1000	4710	0,3720	0,002338	
Antithetic Variates 1	500	4726	0,3729	0,001899	1,231
Antithetic Variates 2	500	4580	0,3727	0,001968	1,188
MomentMatching	780	4697	0,3703	0,002290	1,021
Control Variates	700	4486	0,3759	0,0008457	2,765
Importance Sampling	1000	4492	0,3738	0,001864	1,254

Tabulka 5.1: Údaje o jednotlivých metodách při 1000 opakování

Největší přínos vykazuje metoda Control Variate, neboť jsme schopni generovat silně korelovanou kontrolní proměnnou. Metody Importance Sampling a Antithetic Variates přináší i zde srovnatelné výsledky, stejně jako v modelu s konstantní volatilitou. Úvaha nad možným vylepšením metody Antithetic Variates nebyla nijak přínosná. Původní přístup k této metodě

vykazuje o něco větší redukci. Spočetli jsme proto pro zajímavost výši kovariancí v obou případech. Výběrová kovariance veličin Y a \tilde{Y} činí -1049 v případě původního přístupu a -1005 v případě nového přístupu. Oba údaje spočtené při 100 000 simulacích.

U složitějších modelů přispívají jednotlivé metody k redukci rozptylu menší měrou. U prvního modelu se poměry rozptylů pohybovaly v rozmezí 8-27 (nepočítaje Latin Hypercube Sampling). Zde jsme docílili daleko menších poměrů. Můžeme se domnívat, že např. v případě jiných parametrů modelu se stochastickou volatilitou bychom mohli dosáhnout větší míry redukce. Máme tím na mysli hlavně parametr χ , jehož navýšením bychom modelovali více volatilní volatilitu.

Na závěr poznamenejme, že stochastická volatilita s uvedenými parametry navýší cenu opce jen o málo. Odhad ceny up-and-out call opce v modelu s konstantní volatilitou při $\Delta t = 1/100$ získaný skrze Importance Sampling činí při 1 000 000 simulacích 0,3695, kdežto odhad ceny této opce skrze Control Variates, uvažujeme-li stochastickou volatilitu a počítáme-li 1 000 000 simulací, je ve výši 0,3736.

Kapitola 6

Závěr

Naším cílem bylo přiblížit čtenáři prostřednictvím této diplomové práce různé postupy, jak zvýšit efektivitu Monte Carlo simulací, které v poslední době nabývají na významu nejen v oblasti financí. Aplikace šesti uvedených metod na oceňování bariérové opce ve dvou různých modelech pro vývoj ceny podkladového aktiva vede k závěru, že nemůžeme obecně říci, která z metod přináší nejlepší výsledky. Specifika každé simulace, ať už se jedná o tvar výplatní funkce, model pro vývoj ceny aktiva či existenci obdobného finančního produktu, jsou důležitým kritériem pro přínosnost každé z metod.

Výsledky srovnání jednotlivých postupů, jak při simulacích docílit redukce rozptylu hledaného odhadu, se odvíjí i od časové náročnosti dílčích kroků. Z numerických výsledků jsme zjistili, že metody Stratified Sampling a Latin Hypercube Sampling, u kterých bychom očekávali velkou přesnost a které jsou postaveny na výpočtu hodnot inverzní distribuční funkce, jsou natolik časově náročné, že v uvedených případech nemohou ostatním metodám konkurovat.

Potřebu používat simulace jsme ukázali i na případě bariérové opce v modelu s konstantní volatilitou, pro jejíž ocenění existuje analytický vzorec postavený na Black-Scholesově formuli. Tento vzorec však vychází ze spojitého

pozorování ceny podkladového aktiva, a proto způsobuje pozorování cen v diskrétních časových okamžicích nepřesné výsledky. Pro diskrétní bariérovou opci je tak lepší přistoupit k oceňování na základě simulací, protože ani korekce tohoto vzorce publikovaná v roce 1997 není ve všech případech dostatečná.

Literatura

- [1] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, Praha, 2005.
- [2] Broadie, M., Glasserman, P., Kou, S.: *A Continuity Correction for Discrete Barrier Options*, *Mathematical Finance* **7,4**, str. 325-348, 1997.
- [3] Glasserman, P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag New York, Inc., 2004.
- [4] Heston, S.L.: *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, *Review of Financial Studies* **6**, str. 327-343, 1993.
- [5] Hull, J.: *Options, Futures & Other Derivatives*, Prentice Hall, New Jersey, 5. vydání, 2003.
- [6] Hull, J., White, A.: *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, *Journal of Finance* **42**, str. 281-300, 1987.
- [7] Jäckel, P.: *Monte Carlo Methods in Finance*, John Wiley& Sons Ltd., Chichester, 2002.
- [8] Merton, R.C.: *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*, *Journal of Finance* **29**, str. 449-470, 1974.

- [9] Mun, J.: *Modeling Risk: Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting, and Optimization Techniques*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2006.
- [10] Stein, M.: *Large Sample Properties of Simulations Using Latin Hypercube Sampling*, *Technometrics* **29**, str. 143-151, 1987.
- [11] <http://www.wikipedia.org>.
- [12] Zvára, K., Štěpán, J., : *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress, Praha, 2002.